V. JAMET

Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 129-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__129_1>

[$O^1 5j$]

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. V. JAMET.

1. Dans un récent article sur les lignes asymptotiques [*Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par des quadratures* (*N. A.*, septembre 1910)], M. Buhl constate que la recherche des lignes asymptotiques du tore dépend des fonctions elliptiques. Je dis qu'il en est de même pour toute surface de révolution dont la méridienne est une conique. Je suppose connue l'équation différentielle des lignes asymptotiques d'une surface sur laquelle les coordonnées homogènes X, Y, Z, T d'un point courant sont exprimées en fonction de deux paramètres u, v. D'autre part, si l'équation de la méridienne d'une surface de révolution, rapportée à son axe pris pour axe des z, et à une droite Or, perpendiculaire à Oz, tracée dans le plan du méridien, résulte de

l'élimination d'un paramètre u entre les deux équations

$$r = \frac{\varphi(u)}{\theta(u)}, \qquad z = \frac{f(u)}{\theta(u)},$$

on pourra représenter la surface par les équations

$$X = \varphi(u)\cos v, \quad Y = \varphi(u)\sin v, \quad Z = f(u), \quad T = \theta(u),$$

et l'équation différentielle dont il a été question ci-dessus deviendra

$$\begin{vmatrix} \varphi''(u)\cos v\,du^2 - 2\varphi'(u)\sin v\,du\,dv - \varphi(u)\cos v\,dv^2 & \varphi'(u)\cos v & -\varphi(u)\sin v & \varphi(u)\cos v \\ \varphi''(u)\sin v\,du^2 + 2\varphi'(u)\cos v\,du\,dv - \varphi(u)\sin v\,dv^2 & \varphi'(u)\sin v & \varphi(u)\cos v & \varphi(u)\sin v \\ f''(u)\,du^2 & f'(u) & 0 & f(u) \\ \theta''(u)\,du^2 & \theta'(u) & 0 & \theta(u) \end{vmatrix} = 0$$

puis, après réduction,

$$\begin{vmatrix} \varphi''(u) & \varphi'(u) & \varphi(u) \\ f''(u) & f'(u) & f(u) \\ \theta''(u) & \theta'(u) & \theta(u) \end{vmatrix} du^2 - \varphi(u)[\theta(u)f'(u) - f(u)\theta'(u)]\,dv^2 = 0.$$

Dans le problème qui nous occupe, on peut remplacer les fonctions φ, f, θ, par trois trinomes du second degré, savoir :

$$\begin{aligned} \varphi &= a u^2 + 2 b u + c, \\ f &= a' u^2 + 2 b' u + c', \\ \theta &= \alpha u^2 + 2\beta u + \gamma, \end{aligned}$$

et l'on constate que le déterminant qui figure dans cette dernière équation se réduit à une constante, égale à

$$4\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons cette constante par Δ; nous écrirons l'équation différentielle qui précède sous la forme

$$\Delta\, du^2 - \varphi(\theta f' - f\theta')\, dv^2 = 0. \tag{1}$$

Observant alors que la fonction

$$\varphi(\theta f' - f\theta')$$

se réduit à un polynome entier du quatrième degré, nous en concluons que la fonction u, de la variable v, est une fonction elliptique de cette variable, et nous nous proposons de rechercher tout d'abord les cas particuliers où cette fonction dégénère en une transcendante plus élémentaire. Ces cas particuliers sont les suivants :

a. L'équation $\varphi = 0$ a une racine double.

b. L'équation $\theta f' - f\theta' = 0$ a une racine double.

c. Les deux équations $\varphi = 0$, $\theta f' - f\theta' = 0$ ont une racine commune.

Ces trois hypothèses s'interprètent géométriquement comme il suit :

a. *La conique méridienne est tangente à l'axe de révolution.*

b. Supposons tout d'abord que l'équation $\theta = 0$ ait deux racines distinctes, de telle sorte qu'on ait

$$\theta = (u - u_1)(u - u_2)$$

et déplaçons le plan des xy parallèlement à lui-même, de telle sorte qu'on ait aussi

$$\frac{f}{\theta} = \frac{A}{u - u_1} + \frac{B}{u - u_2}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\theta f' - f\theta' &= -\theta^2\left(\frac{A}{(u-u_1)^2} + \frac{B}{(u-u_2)^2}\right)\\ &= -[A(u-u_2)^2 + B(u-u_1)^2].\end{aligned}$$

Pour que l'équation

$$\theta f' - f\theta' = 0$$

ait deux racines égales, il faudra qu'on ait

$$(Au_2 + Bu_1)^2 - (A + B)(Au_2^2 + Bu_1^2) = 0$$

ou bien

$$2AB(u_1 - u_2)^2 = 0.$$

Supposant $u_1 - u_2 \neq 0$, nous concluons que l'un des coefficients A ou B doit être nul, et par conséquent

$$\frac{f}{\theta} = \frac{A}{u - u_1}.$$

La méridienne est donc représentée par les équations paramétriques

$$r = \frac{au^2 + 2bu + c}{(u - u_1)(u - u_2)},$$

$$z = \frac{A}{u - u_1},$$

et l'on reconnaît *qu'elle a une asymptote perpendiculaire à l'axe de révolution.*

Si l'on avait supposé $u_1 = u_2$, on aurait trouvé

$$\theta f' - f\theta' = (u - u_1)[(u - u_1)f' - 2f].$$

Dans ce cas, les deux racines de l'équation considérée ne peuvent être égales que si f est divisible par $u - u_1$. Par une translation du plan des xy, on ramènerait alors l'expression de $\frac{f}{\theta}$ à la forme

$$\frac{A}{u - u_1},$$

et la conclusion serait la même que précédemment.

c. Dans ce cas particulier, la cote z maximum ou minimum d'un point de la méridienne est aussi la cote d'un point commun à la méridienne et à l'axe de révolution. *L'axe de révolution est normal à la conique méridienne.*

2. Revenons maintenant à l'équation (1), et supposons que nous ayons effectué une substitution homographique permettant de remplacer le polynome biquadratique

$$\varphi(\theta f' - f\theta')$$

par un polynome du troisième degré, de telle sorte que l'équation transformée soit

$$(2) \qquad \Delta\, du^2 + G(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)\, dv^2 = 0,$$

ξ désignant la nouvelle variable, G, ξ_1, ξ_2, ξ_3, des constantes. On pourra exprimer ξ en fonction de v, au moyen d'une des deux formules suivantes, choisie à volonté :

$$(\mathrm{A}) \qquad \xi = \xi_1 \operatorname{cn}^2\left(C \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G(\xi_1 - \xi_3)}{\Delta}}\, v\right) + \xi_2 \operatorname{sn}^2\left(C \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G(\xi_1 - \xi_3)}{\Delta}}\, v\right),$$

le module k des fonctions sn, cn, étant défini par l'équation

$$k^2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \xi_3},$$

ou bien

$$(\mathrm{B}) \qquad \xi = p\left(C \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{G}{\Delta}}\, v\right) + \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3},$$

la fonction p étant choisie de telle sorte que, si l'on appelle ses périodes 2ω et $2\omega'$, on ait

$$p\omega = \frac{2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3}{3}, \qquad p\omega' = \frac{2\xi_2 - \xi_1 - \xi_3}{3}.$$

Dans ces deux formules, la lettre C désigne une constante arbitraire, et l'on peut les remplacer par des formules analogues obtenues en permutant de toutes les manières possibles ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Mais je dis qu'on peut arriver à la forme (2), antérieurement à toute substitution, à condition de choisir convenablement la représentation paramétrique de la conique méridienne.

D'abord, si cette conique est une parabole, elle sera représentée par une équation de la forme

$$(\mathrm{M}r + \mathrm{N}z + \mathrm{P})^2 = \mathrm{Q}r + \mathrm{S}z + \mathrm{T},$$

et si l'on pose

$$\mathrm{Q}r + \mathrm{S}z + \mathrm{T} = u^2,$$
$$\mathrm{M}r + \mathrm{N}z + \mathrm{P} = u,$$

on exprimera r et z au moyen de deux trinomes du second degré en u; et l'on sera conduit simplement à faire $\theta = 1$ dans l'équation (1). On trouvera

$$2(ab' - a'b)\,du^2 - (au^2 + 2bu + c)(a'u + b')\,dv^2 = 0,$$

et la construction des formules analogues à (A) et (B), où ξ sera remplacé par u, n'offrira plus de difficulté.

Si la méridienne a un centre à distance finie, on fera passer l'axe des r par ce centre, et l'on ramènera son équation à la forme

$$(\mathrm{M}(r - r_0) + \mathrm{N}z)^2 + \mathrm{P}z^2 = 1,$$

ce qui conduit à faire

$$\mathrm{M}(r - r_0) - \mathrm{N}z = \sin t,$$
$$\mathrm{P}z = \cos t,$$

puis

$$t = 2 \operatorname{arc\,tang} u.$$

Les polynomes f et θ prennent alors la forme

$$f = c'(1 - u^2),$$
$$\theta = 1 + u^2$$

(c' désignant une constante), et l'équation différentielle des lignes asymptotiques prend une forme analogue à la forme (2), où ξ est remplacé par u. En effet, si l'on joint aux deux formules ci-dessus la formule

$$\varphi = au^2 + 2bu = c,$$

l'équation (1) devient

$$2bc'\,du^2 + c'(au^2 + 2bu + c)u\,dv^2 = 0.$$

On écrira cette dernière équation sous la forme

$$2b\,du^2 + a(u - u_1)(u - u_2)u\,dv^2 = 0$$

et l'on appliquera la formule (A), par exemple, en supposant

$$\xi_1 = u_1, \qquad \xi_2 = u_2, \qquad \xi_3 = 0.$$

On trouvera

$$\begin{aligned} u = {} & u_1\,\mathrm{cn}^2\left(C \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{au_1}{b}}\,v\right) \\ & + u_2\,\mathrm{sn}^2\left(C \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{au_1}{b}}\,v\right) \end{aligned}$$

avec

$$k^2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1}$$

ou tout autre formule analogue obtenue en permutant d'une manière quelconque les trois racines u_1, u_2, 0. Si c'est, au contraire, la formule (B) qu'on veut appliquer, on trouvera

$$u = \wp\left(C \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,v\right) + \frac{u_1 + u_2}{3}$$

ou bien

$$u = \wp\left(C \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,v\right) - \frac{2b}{3a}$$

avec

$$\wp\,\omega = \frac{2u_1 - u_2}{3}, \qquad \wp\,\omega' = \frac{2u_2 - u_1}{3}.$$