Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Sur les formules de quadrature de cotes. Généralisation d’une formule d’Euler

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 87-90

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__87_0>

[C2j]

SUR LES FORMULES DE QUADRATURE DE COTES. GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE D'EULER;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Les formules de Cotes (*Nouvelles Annales*, 1909, p. 291)

$$(1) \qquad S = h\,\frac{y_0+y_1}{2},$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (2) & S = h\,\dfrac{y_0+4y_1+y_2}{6}, \\ (3) & S = h\,\dfrac{y_0+3y_1+3y_2+y_3}{8}, \\ (4) & S = h\,\dfrac{7y_0+32y_1+12y_2+32y_3+7y_4}{90}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

donnent une valeur approchée de l'aire comprise entre l'axe des x, une courbe *quelconque* $y=f(x)$, et deux ordonnées correspondant aux abscisses x et $x+h$. L'expression de l'erreur commise par l'emploi de chacune de ces formules peut se mettre sous la forme suivante :

$$(1') \qquad -\frac{h^3}{12}f''(\xi),$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (2') & -\dfrac{h^5}{2880}f^{\text{IV}}(\xi), \\ (3') & -\dfrac{h^5}{6480}f^{\text{IV}}(\xi), \\ (4') & -\dfrac{h^7}{1\,935\,360}f^{\text{VI}}(\xi), \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

la lettre ξ désigne une valeur comprise entre x et $x+h$.

Les expressions (1′) et (2′) se trouvent dans les *Leçons d'Algèbre* de M. Tannery.

La remarque de Catalan, généralisée par Maleyx, devait faire prévoir que les expressions (2′), (4′), ... *renfermeraient* $h^5, h^7, \ldots,$ *au lieu de* $h^4, h^6, \ldots.$

II.

2. A la formule (1) et à l'expression (1′) du reste se rattache une formule due à Euler, retrouvée d'ailleurs par Maclaurin à qui on l'a longtemps attribuée. La notation $F(x)$ désignant une fonction primitive de $f(x)$, on a

$$
\begin{aligned}
(1'')\quad F(\beta)-F(\alpha) = {} & h\,\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} - \frac{B_1 h^2}{1.2}[f'(\beta)-f'(\alpha)] \\
& + \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}[f'''(\beta)-f'''(\alpha)] + \ldots \\
& + (-1)^n \frac{B_n h^{2n}}{(2n)!}[f^{2n-1}(\beta)-f^{2n-1}(\alpha)] \\
& + (-1)^{n+1}\frac{B_{n+1} h^{2n+3}}{(2n+2)!} f^{2n+2}(\xi);
\end{aligned}
$$

l'expression du reste est due à Malmsten. Les B sont les nombres de Bernoulli, et l'on a, pour $n=1$,

$$
\begin{aligned}
F(\beta)-F(\alpha) = {} & h\,\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} - \frac{h^2}{12}[f'(\beta)-f'(\alpha)] \\
& + \frac{h^5}{720} f^{\text{IV}}(\xi).
\end{aligned}
$$

3. Ayant observé que *la forme de la formule d'Euler est liée au fait qu'elle se reproduit quand on échange* α *et* β, j'ai eu l'idée de chercher une formule analogue en prenant comme point de départ la

formule (2). On trouve

$$
\begin{aligned}
(2'') \quad \mathrm{F}(\beta)-\mathrm{F}(\alpha) = h\,&\frac{f(\alpha)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)}{6}\\
&-\frac{h^4}{2880}[f'''(\beta)-f'''(\alpha)]\\
&+\frac{h^6}{96\,768}[f^{\mathrm{v}}(\beta)-f^{\mathrm{v}}(\alpha)]\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

On peut, comme pour la formule d'Euler, déterminer les coefficients numériques en prenant

$$\mathrm{F}(x) = e^x;$$

on trouve

$$\frac{e^h+4e^{\frac{h}{2}}+1}{6}\,\frac{h}{e^h-1}-1 = \frac{h^4}{2880}-\frac{h^6}{96\,768}+\ldots,$$

et l'on est ramené à former le développement du premier membre.

On aurait de même

$$
\begin{aligned}
(3'') \quad \mathrm{F}(\beta)-\mathrm{F}(\alpha) = h\,&\frac{f(\alpha)+3f\left(\alpha+\frac{h}{3}\right)+3f\left(\alpha+\frac{2h}{3}\right)+f(\beta)}{8}\\
&-\frac{h^4}{6480}[f'''(\beta)-f'''(\alpha)]+\ldots.
\end{aligned}
$$

4. La formule $(4'')$ aurait, après le terme en h, un terme en h^6, et il en serait de même de la formule $(5'')$; etc.

La forme de ces formules ne permet, après le terme en h, que des termes de degré pair en h; c'est ainsi que les formules $(2'')$, $(4'')$, ... ne peuvent avoir de termes en h^3, h^5, ...; et l'on comprend ainsi que les expressions $(2')$, $(4')$, ..., au lieu de contenir h^4, h^6, ..., avec f''', f^{v}, ..., contiennent h^5, h^7, ..., avec f^{iv}, f^{vi}, ...; on voit dès lors que la formule (2) est exacte pour un polynome du troisième degré, aussi bien que la formule (3), que de même la formule (4) est exacte pour un polynome du cinquième degré, aussi bien que la formule (5), etc.