

G. FONTENÉ

Théorie des fonctions hyperboliques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 481-501

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__481_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D6d]

THÉORIE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette Note renferme un exposé assez complet d'une théorie dont on ne donne le plus souvent que le strict nécessaire; j'ai apporté un soin extrême à la rédaction, recherchant, à défaut d'autre mérite, celui de la netteté.

I. — FONCTIONS HYPERBOLIQUES DIRECTES.

1. On connaît la formule d'Euler

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

dans laquelle $\cos x$ est une fonction paire et $\sin x$ une fonction impaire. On écrit par analogie

$$(1) \quad \begin{cases} e^u = \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u, \\ e^{-u} = \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u, \\ e^{2u} = \frac{1 + \operatorname{th} u}{1 - \operatorname{th} u}, \end{cases}$$

et l'on définit ainsi trois fonctions d'une variable u liées par les relations

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \\ \operatorname{th} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} \end{cases} \quad (\operatorname{ch} u > 0);$$

en réalité, c'est cette dernière relation qui sert de définition à la fonction $\operatorname{th} u$; si l'on observe (voir plus loin) que $\operatorname{ch} u$ est toujours positif, il résulte des formules (2) que $\operatorname{ch} u$ et $\operatorname{sh} u$ s'expriment en fonction de

th u par les formules

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ch } u = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 u}}, \\ \text{sh } u = \frac{\text{th } u}{\sqrt{1 - \text{th}^2 u}}. \end{array} \right.$$

Les notations ch, sh, th se lisent respectivement *cosinus hyperbolique*, *sinus hyperbolique*, *tangente hyperbolique*, et ces dénominations seront justifiées (1). La variable u d'une fonction hyperbolique prend le nom d'*argument*.

2. On a donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ch } u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \\ \text{sh } u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \\ \text{th } u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}. \end{array} \right.$$

3. La fonction ch u est, comme on l'a dit, une fonction paire; elle est essentiellement positive. La fonction sh u est une fonction impaire, ayant le signe de u , et il en est de même de la fonction th u . La variation de ces fonctions est résumée par le Tableau suivant :

u	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	décroit	1	croît	$+\infty$
sh	$-\infty$	croît	0	croît	$+\infty$
th	-1	croît	0	croît	$+1$

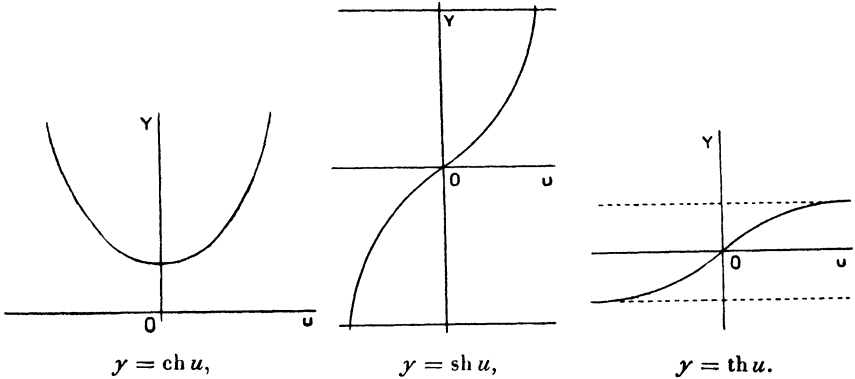
(1) L'ordre adopté ici pour l'exposition analytique cadre bien avec celui de l'exposition géométrique, pour laquelle on établit d'abord (§ IV) la formule de Mercator

$$u = L(x + \gamma) \quad \text{ou} \quad e^u = x + \gamma.$$

Un cosinus hyperbolique est l'inverse du cosinus circulaire d'un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et l'on peut choisir l'arc qui a même signe que l'argument si celui-ci est donné. Un sinus hyperbolique est une tangente circulaire, une tangente hyperbolique est un sinus circulaire, et l'on peut prendre l'arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Nous reviendrons sur ce point, en considérant l'angle τ qui est l'amplitude hyperbolique de l'argument u .

On a les courbes suivantes, dont la première est une chaînette :

Fig. 1.



4. L'identité

$$e^{u+v+\dots} = e^u \times e^v \times \dots$$

donne

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{ch}(u+v+\dots) + \text{sh}(u+v+\dots) \\ = (\text{ch } u + \text{sh } u)(\text{ch } v + \text{sh } v) \dots \end{aligned}$$

Cette relation, jointe à celle que l'on obtient en changeant les signes des arguments, donne les formules d'addition des fonctions hyperboliques. On a pour

deux arguments

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v, \\ \operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v, \\ \operatorname{th}(u+v) = \frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}. \end{cases}$$

On a en particulier

$$7) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u, \\ \operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u, \\ \operatorname{th} 2u = \frac{2 \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th}^2 u}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ch} \frac{u}{2} = \operatorname{ch}^2 \frac{u}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2}, \\ \operatorname{sh} \frac{u}{2} = 2 \operatorname{sh} \frac{u}{2} \operatorname{ch} \frac{u}{2}, \\ \operatorname{th} \frac{u}{2} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{u}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{u}{2}}; \end{cases}$$

on en déduit

$$(8) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} u + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{2}, \\ \operatorname{ch} u - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2}, \\ \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u + 1} = \operatorname{th}^2 \frac{u}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{th} \frac{u}{2}, \\ \frac{\operatorname{ch} u + 1}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{coth} \frac{u}{2}, \end{cases}$$

la fonction coth étant l'inverse de la fonction th .

On a encore

$$(9) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} u = \frac{1+z^2}{1-z^2}, \\ \operatorname{sh} u = \frac{2z}{1-z^2}, \\ \operatorname{th} u = \frac{2z}{1+z^2}, \end{cases} \quad \operatorname{th} \frac{u}{2} = z.$$

On transformerait facilement en produits les quantités $\operatorname{ch} p \pm \operatorname{ch} q$, $\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q$.

5. La définition des fonctions hyperboliques donne

immédiatement

$$(10) \quad (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u, \quad (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u, \quad (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}.$$

II. — FONCTIONS HYPERBOLIQUES INVERSES.

6. La quantité $\arg \operatorname{ch} x$ a deux valeurs opposées pour une même valeur de x ; chacune des quantités $\arg \operatorname{sh} x$, $\arg \operatorname{th} x$ est bien déterminée si l'on se donne x .

De même que les fonctions hyperboliques directes s'expriment au moyen de la fonction exponentielle, les fonctions hyperboliques inverses s'expriment au moyen de la fonction inverse de l'exponentielle, c'est-à-dire au moyen du logarithme. On pourrait partir des relations (4), multiplier les deux termes de chacun des seconds membres par e^u , résoudre par rapport à e^u , ...; mais cette résolution est toute faite par les formules (1), en tenant compte de la première des relations (2). On a ainsi, en remplaçant par exemple $\operatorname{ch} u$ par x , et u par $\arg \operatorname{ch} x$,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \arg \operatorname{ch} x = L(x + \varepsilon \sqrt{x^2 - 1}), \quad x > 1, \\ \varepsilon \text{ étant le signe de l'argument,} \\ \arg \operatorname{sh} x = L(x + \sqrt{x^2 + 1}), \\ \arg \operatorname{th} x = \frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1; \end{array} \right.$$

les deux nombres $x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ sont inverses, et leurs logarithmes sont bien deux nombres opposés.

7. Voici les dérivées de ces fonctions :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\arg \operatorname{ch} x)' \text{ ou } [L(x + \varepsilon \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{x^2 - 1}}, \\ \varepsilon \text{ étant le signe de l'argument,} \\ (\arg \operatorname{sh} x)' \text{ ou } [L(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \\ (\arg \operatorname{th} x)' \text{ ou } \left[\frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x} \right]' = \frac{1}{1-x^2}; \end{array} \right.$$

dans cette dernière formule x est supposé compris entre -1 et $+1$, mais on a encore, en introduisant la fonction coth , inverse de la fonction th ,

$$(\arg \text{coth } x)' \text{ ou } \left[\frac{1}{2} L \frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{1-x^2},$$

pour $x^2 > 1$.

On a donc les intégrales indéfinies suivantes :

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dx}{\varepsilon \sqrt{x^2-1}} = \arg \text{ch } x \text{ ou } L(x + \varepsilon \sqrt{x^2-1}) \quad (x > 1), \\ \text{l'argument ayant le signe } \varepsilon, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \arg \text{sh } x \text{ ou } L(x + \sqrt{x^2+1}), \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \arg \text{th } x \text{ ou } \frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x} \quad (x^2 < 1), \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \arg \text{coth } x \text{ ou } \frac{1}{2} L \frac{x+1}{x-1} \quad \left(\begin{array}{l} x > 1 \\ \text{ou} \\ x < -1 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

et l'on peut écrire dans tous les cas

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} L \left| \frac{1+x}{1-x} \right|;$$

au point de vue de l'intégrale définie, cette dernière formule suppose que la variable ne traverse aucune des deux valeurs 1 et -1 ; au même point de vue, pour la première des intégrales (13), ε peut changer d'une limite de l'intégration à l'autre : on considère $\int_A^B \frac{dx}{y}$, quand le point (x, y) se déplace de A en B sur la branche de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$ qui correspond à x positif.

III. — AMPLITUDE HYPERBOLIQUE.

8. On a vu qu'un cosinus hyperbolique est l'inverse d'un cosinus circulaire positif, La comparaison des

formules

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1, \quad \sec^2 \tau - \operatorname{tang}^2 \tau = 1$$

conduit à définir pour chaque argument u un angle correspondant τ par les formules concordantes

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} u \cos \tau = 1, \\ \operatorname{sh} u = \operatorname{tang} \tau \\ \operatorname{th} u = \sin \tau, \end{array} \right. \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2} \right),$$

et l'on dit que l'angle τ est l'*amplitude hyperbolique* de l'argument u ; on a ce Tableau :

$$\begin{array}{l} \tau \left| \begin{array}{ll} -\frac{\pi}{2} & \text{croit} & +\frac{\pi}{2} \\ -\infty & \text{croit} & +\infty. \end{array} \right. \end{array}$$

On peut remarquer que la relation entre u et τ est traduite graphiquement par ce fait : la tangente au point u de la chaînette (*fig. 1*) fait avec l'axe des u un angle égal à τ ; la relation $y = \operatorname{ch} u$ donne en effet $y'_u = \operatorname{sh} u = \operatorname{tang} \tau$. (La relation $y = \frac{1}{\cos \tau}$ donne la propriété de la tractrice.)

9. Si l'on écrit

$$\begin{aligned} \cos \tau &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin \tau &= \frac{2t}{1+t^2}, & \operatorname{tang} \frac{\tau}{2} &= t, \\ \operatorname{tang} \tau &= \frac{2t}{1-t^2}, \end{aligned}$$

la comparaison de ces formules avec les formules (9) montre que l'on aura $\operatorname{ch} u \cdot \cos \tau = 1$, $\operatorname{sh} u = \operatorname{tang} \tau$, $\operatorname{th} u = \sin \tau$, en faisant $z = t$; on arrive ainsi d'une manière naturelle à la relation

$$(15) \quad \operatorname{th} \frac{u}{2} = \operatorname{tang} \frac{\tau}{2},$$

due, je crois, à M. Laisant, et qui suffit à déterminer complètement l'angle τ en fonction de u .

On se rend bien compte de cette formule en écrivant, d'après les relations (14),

$$\operatorname{tang} \frac{\tau}{2} = \frac{1 - \cos \tau}{\sin \tau} = \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{th} \frac{u}{2}.$$

10. Pour introduire l'exponentielle e^u dans la définition de τ , il suffit d'appliquer la dernière des formules (1) à l'argument $\frac{u}{2}$, et de remplacer $\operatorname{th} \frac{u}{2}$ par $\operatorname{tang} \frac{\tau}{2}$. On a ainsi

$$(16) \quad e^u = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right),$$

$$(17) \quad \begin{cases} u \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right), \\ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} e^u; \right. \end{cases}$$

$\frac{\tau}{2}$ étant compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On voit qu'une Table donnant les valeurs de $\sin \tau$, $\cos \tau$, $\operatorname{tang} \tau$ peut donner en même temps les valeurs de $\operatorname{th} u$, $\operatorname{ch} u$, $\operatorname{sh} u$. (Voir J. HOUEL, *Recueil de formules et de Tables numériques.*)

IV. — INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Les formules (1'), (2'), ... données ici correspondent aux formules (1), (2), ... données précédemment.

11. Lorsqu'il s'agit des fonctions circulaires, le nombre qui mesure l'arc évalué en parties du rayon mesure en même temps le double de l'aire du secteur

circulaire correspondant. Considérons (*fig. 2*) la branche d'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x > 0,$$

et soit u le double de l'aire du secteur hyperbolique AOM, les coordonnées du point M étant x et y . On a

$$\begin{aligned} du &= x dy - y dx, \\ 0 &= x dx - y dy, \end{aligned}$$

et, en ajoutant,

$$\begin{aligned} du &= (x - y)(dx + dy) = \frac{d(x + y)}{x + y} = dL(x + y), \\ u &= L(x + y); \end{aligned}$$

cette formule est due à Mercator (*Logarithmotechnia*, 1668).

On a donc

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} u = L(x + y), \\ -u = L(x - y), \\ 2u = L \frac{1+m}{1-m}, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} e^u = x + y, \\ e^{-u} = x - y, \\ e^{2u} = \frac{1+m}{1-m}, \end{array} \right.$$

avec

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 1, \quad x > 0, \\ m = \frac{y}{x}; \end{array} \right.$$

et l'on voit que, la lettre u désignant le double de l'aire du secteur hyperbolique AOM, les coordonnées x et y du point M sont $\text{ch } u$ et $\text{sh } u$, le coefficient angulaire m de la droite OM est $\text{th } u$.

Ainsi s'explique le nom de fonctions hyperboliques donné aux expressions $\text{ch } u$, $\text{sh } u$, $\text{th } u$. La branche d'hyperbole équilatère considérée est en même temps la meilleure courbe représentative de la variation de ces fonctions.

La dernière des formules (1') peut s'écrire, en dési-

gnant par μ l'angle xOM ,

$$(1'') \quad \begin{cases} 2u = L\left(\frac{1+m}{1-m}\right) = L \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \mu\right), \\ e^{2u} = \frac{1+m}{1-m} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \mu\right). \end{cases}$$

12. Si l'on a entre des aires AOM , AOM_1 , AOM_2 , ... la relation

$$u = u_1 + u_2 + \dots,$$

on a, d'après la formule de Mercator,

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \dots, \\ x - y = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \dots, \\ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \mu\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \mu_1\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \mu_2\right) \dots \end{array} \right.$$

Moivre s'est occupé le premier de la multiplication du secteur hyperbolique par un nombre entier et a obtenu, pour $u = nu_1$,

$$x + y = (x_1 + y_1)^n$$

(*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, 1730); c'est ainsi qu'il a été conduit, en passant de l'hyperbole équilatère au cercle, à la célèbre formule qui porte son nom⁽¹⁾.

13. Si l'on définit $ch u$ et $sh u$ comme étant les coordonnées du point M , avec $u = 2$ sect. hyp. AOM , il est facile d'établir géométriquement les formules d'addition des fonctions hyperboliques, comme je l'ai montré ailleurs (*Mathesis*, 1900, p. 241). La démonstration classique des formules d'addition des fonctions circulaires, que l'on se propose d'imiter, repose en effet

(1) Les quelques renseignements historiques donnés ici sont empruntés à un article de Hoüel (*Nouvelles Annales*, 1864, p. 417).

uniquement sur la possibilité de déplacer l'origine des arcs ; or le déplacement analogue dans le cas des fonctions hyperboliques est parfaitement réalisable, en considérant deux diamètres conjugués au lieu de considérer les axes. Je me bornerai sur ce sujet à cette simple indication.

Lorsqu'on procède ainsi, les dérivées des fonctions hyperboliques s'obtiennent comme celles des fonctions circulaires.

14. En ce qui concerne les fonctions hyperboliques inverses, on a ceci : *Dans la formule de Mercator,*

$$u = L(x + y) \quad (x^2 - y^2 = 1, x > 0),$$

x et y sont $\operatorname{ch} u$ et $\operatorname{sh} u$, de sorte que u est l'argument qui correspond à un cosinus hyperbolique égal à x , à un sinus hyperbolique égal à y ; on a ainsi, en désignant par ε le signe de y ,

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \arg \operatorname{ch} x = L(x + y) = L(x + \varepsilon \sqrt{x^2 - 1}), \\ u = \arg \operatorname{sh} y = L(x + y) = L(y + \sqrt{y^2 + 1}), \\ u = \arg \operatorname{th} m = \frac{1}{2} L\left(\frac{1+m}{1-m}\right) \quad (1). \end{array} \right.$$

On a

$$(12') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = \frac{1}{y}, \\ \frac{du}{dy} = \frac{1}{x}, \\ \frac{du}{dm} = \frac{1}{1-m^2}, \end{array} \right. \quad u = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dy}{x},$$

(1) Bien entendu, en ce qui concerne la formule de Mercator, on aurait pu exprimer du en fonction de x seul ou de y seul, et obtenir $u = L(x + \varepsilon \sqrt{x^2 - 1})$, ..., en supposant connue l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$.

comme on le voit immédiatement par les relations écrites au début du n° 11.

15. Le point M de l'hyperbole correspond à l'argument u , et le point M' du cercle à l'amplitude τ , de sorte qu'on a

$$u = 2 \text{ sect. hyp. } AOM, \quad \tau = 2 \text{ sect. circul. } AOM';$$

la formule $\text{ch } u \cdot \cos \tau = 1$ donne d'abord $OP \cdot OP' = \overline{OA}^2$, de sorte que P et P' sont conjugués par rapport à l'hyperbole et par rapport au cercle : MP' est la tangente à l'hyperbole, M'P est la tangente au cercle. Les formules $\text{sh } u = \text{tg } \tau$, $\sin \tau = \text{th } u$, donnent $PM = AT'$, $P'M' = AT$.

Les points A', M', M sont en ligne droite, car la condition pour qu'il en soit ainsi, savoir $\frac{P'M'}{P'A'} = \frac{PM}{PA'}$, devient successivement, par élévation au carré,

$$-\frac{P'A \cdot P'A'}{P'A'^2} = \frac{PA \cdot PA'}{PA'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{P'A}{P'A'} = -\frac{PA}{PA'}$$

ce qui a lieu; ce fait donne une construction très simple du point M' d'après le point M.

La polaire du point A' par rapport au système des deux droites P'M', PM est la tangente en A; les tangentes MP' et M'P se coupent donc en un point I situé sur la tangente en A.

La relation $\text{th } \frac{u}{2} = \text{tang } \frac{\tau}{2}$ s'interprète comme il suit : Le point M de l'hyperbole et le point M' du cercle se rapportant respectivement à un argument u et à l'amplitude correspondante τ , la droite ON qui se rapporte à l'argument $\frac{u}{2}$ se confond avec la bissectrice de l'angle AOM'; cette bissectrice est d'ailleurs la

droite OI; elle est parallèle à la droite A'M, et ce fait se retrouvera plus loin (n° 18): il en résulte que, lorsqu'on pose

$$\operatorname{th} \frac{u}{2} = \operatorname{tang} \frac{\tau}{2} = t,$$

t est le coefficient angulaire de la droite A'M'M (paramètre unicursal pour l'hyperbole et pour le cercle).

La transformation qui donne la formule (1'')

$$2u = L \left(\frac{1+m}{1-m} \right) = L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right),$$

$$e^{2u} = \frac{1+m}{1-m} = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right),$$

a été appliquée précédemment au point N, dont l'argument est $\frac{u}{2}$ et pour lequel μ a la valeur $\frac{\tau}{2}$; c'est ainsi que l'on a obtenu au n° 10

$$u = L \frac{1+t}{1-t} = L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right),$$

$$e^u = \frac{1+t}{1-t} = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right).$$

L'accord des formules

$$2u = L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right),$$

$$u = L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right),$$

exige naturellement qu'on ait

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right) = \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right);$$

cette relation résulte de ce qu'on a vu au n° 12, l'argument du point M étant double de celui du point N, et les valeurs des angles x OM et x ON étant μ et $\frac{\tau}{2}$;

cette même relation équivaut d'ailleurs à la relation $\text{tang } \mu = \sin \tau$, le second membre ayant pour valeur $\frac{1 + \sin \tau}{1 - \sin \tau}$.

V. — L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE RAPPORTÉE A SES ASYMPTOTES.

16. Soient OX, OY les asymptotes de l'hyperbole équilatère, et désignons par X et Y les coordonnées d'un point M de la courbe par rapport à ce système d'arcs. On a les formules de transformation

$$\begin{aligned} Y\sqrt{2} &= x + y, \\ X\sqrt{2} &= x - y, \end{aligned}$$

et l'équation de la courbe est

$$XY = \frac{1}{2}.$$

Les formules (1'), (1'') donnent, pour la branche de courbe qui correspond à X et Y positifs,

$$\left\{ \begin{array}{l} u = L(Y\sqrt{2}), \\ -u = L(X\sqrt{2}), \\ 2u = L \text{ tang } \widehat{XOM}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e^u = Y\sqrt{2}, \\ e^{-u} = X\sqrt{2}, \\ e^{2u} = \text{tang } \widehat{XOM}; \end{array} \right.$$

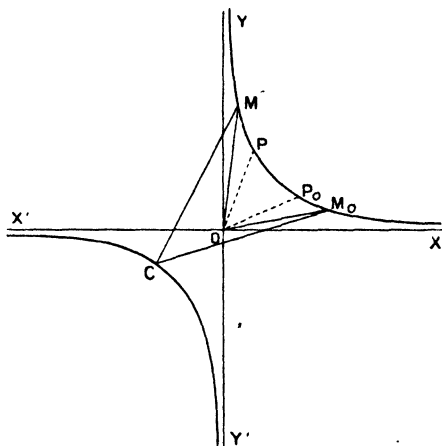
la démonstration directe de ces formules serait d'ailleurs très simple.

17. Pour l'addition des arguments, on a ici

$$u = u_1 + u_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} YY_0 = Y_1 Y_2, \\ XX_0 = X_1 X_2, \\ \text{tang } \widehat{XOM} = \text{tang } \widehat{XOM}_1 \text{ tang } \widehat{XOM}_2, \end{array} \right.$$

de sorte que, M_0 et M étant donnés, la valeur du rapport $\frac{\text{tang}(X'X, CM)}{\text{tang}(X'X, CM_0)}$ reste la même quel que soit le point

Fig. 3.



C pris sur la courbe, et égale à la racine carrée de la valeur du rapport $\frac{\text{tang}(OX, OM)}{\text{tang}(OX, OM_0)}$.

Pour chaque position du point C , menons OP_0 et OP parallèles à CM_0 et CM , de manière qu'on a

$$\frac{\text{tang}(OX, OP)}{\text{tang}(OX, OP_0)} = \sqrt{\frac{\text{tang}(OX, OM)}{\text{tang}(OX, OM_0)}};$$

d'après la dernière formule du n° 16, cette relation peut s'interpréter ainsi : *Le point C variant sur la courbe, l'aire du secteur variable (OP_0, OP) reste constante et égale à la moitié de l'aire du secteur invariable (OM_0, OM) .*

Si l'on prend le point C en A' , l'aire AON (fig. 2) est moitié de l'aire AOM , ON étant parallèle à $A'M$,

(197)

comme on l'a déjà vu à propos de la formule

$$\operatorname{th} \frac{u}{2} = \operatorname{tang} \frac{\zeta}{2}.$$

Le fait analogue pour le cercle est une traduction du théorème de l'angle inscrit ; ce fait se conserve par projection pour l'ellipse, et l'on pourrait conclure de l'ellipse à l'hyperbole en invoquant le principe de continuité.

NOTE.

La question suivante, dont j'emprunte l'énoncé au *Cours de Mécanique* rédigé par M. Appell pour les élèves de Mathématiques spéciales, constitue un exercice intéressant sur l'angle amplitude.

Suivant quelle loi un point doit-il décrire une circonférence pour que son accélération soit proportionnelle à sa vitesse ?

Si l'on désigne par ω la vitesse angulaire

$$(1) \quad \omega = \frac{d\theta}{dt},$$

on doit avoir, en désignant par α une constante que l'on peut supposer positive,

$$R^2 \omega^4 + R^2 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 = \alpha^2 R^2 \omega^2,$$

ou encore

$$R^2 \omega^4 + R^2 \omega^2 \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 = \alpha^2 R^2 \omega^2,$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \omega \sqrt{\alpha^2 - \omega^2},$$

ou encore

$$(3) \quad \frac{d\omega}{d\theta} = \varepsilon \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

La relation (2) a lieu entre ω et t , la relation (3) a lieu entre ω et θ ; on peut écrire, ϵ' étant le signe de ω ,

$$(2') \quad \alpha dt = \frac{d\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)}{-\epsilon\epsilon' \sqrt{\frac{\alpha^2}{\omega^2} - 1}},$$

$$(3') \quad d\theta = \frac{d\frac{\omega}{\alpha}}{\epsilon \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}}}.$$

[De même que les formules $v = \frac{ds}{dt}$, $dv = \gamma_t dt$ donnent $v dv = \gamma_t ds$, qui conduit au théorème de la puissance vive, les formules $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, $R d\omega = \gamma_t dt$ donnent $R \omega d\omega = \gamma_t d\theta$; on a ainsi $\gamma_t = R \frac{d\omega}{dt}$, $\gamma_t = R \omega \frac{d\omega}{d\theta}$, ce qui fournit les deux expressions de γ^2 employées ici.]

PREMIÈRE MÉTHODE. — On peut intégrer séparément (2') et (3'). On a d'abord, en plaçant l'origine des dates à l'instant où l'on a $\omega = \alpha$,

$$\alpha t = \arg \operatorname{ch} \frac{\alpha}{\omega},$$

l'argument, c'est-à-dire αt , ayant le signe $-\epsilon\epsilon'$; on a donc

$$\frac{\alpha}{\omega} = \operatorname{ch} \alpha t \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha t};$$

avec t positif, si t augmente, $\frac{\alpha}{\omega}$ augmente, et il faut bien $-\epsilon\epsilon' = +$ dans la relation (2'); avec t négatif, il faut $-\epsilon\epsilon' = -$.

On a ensuite, en disposant de l'axe polaire,

$$\theta = \text{arc cos } \frac{\omega}{\alpha},$$

l'arc, c'est-à-dire θ , ayant le signe $-\varepsilon$; on a donc

$$\frac{\omega}{\alpha} = \cos \theta:$$

avec θ positif, si θ augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\omega}{\alpha}$ diminue, et il faut bien $\varepsilon = -$ dans la relation (3'); etc.

On a donc

$$(4) \quad \frac{\omega}{\alpha} = \cos \theta = \frac{1}{\text{ch } \alpha t},$$

et la loi du mouvement est donnée par la relation

$$(5) \quad \cos \theta \times \text{ch } \alpha t = 1.$$

Si l'on différencie la relation

$$\cos \theta \times \text{ch } \alpha t = 1,$$

on obtient

$$\frac{\omega}{\alpha} \text{ tang } \theta = \text{th } \alpha t;$$

on en déduit

$$(6) \quad \sin \theta = \text{th } \alpha t, \quad \text{tang } \theta = \text{sh } \alpha t;$$

les formules (5) et (6) expriment que l'angle θ est ce qu'on appelle *l'amplitude de l'argument hypothétique* αt .

On a ce Tableau :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
ω	0	α	0

AUTRE MÉTHODE. — Après avoir intégré l'équation

(500)

(2'), ce qui donne

$$\frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha t},$$

on peut avoir recours à la relation (1); on a ainsi

$$d\theta = \frac{\alpha dt}{\operatorname{ch} \alpha t}$$

et, par suite,

$$\theta = 2 \operatorname{arc tang} \left(\operatorname{th} \frac{\alpha t}{2} \right),$$

ou

$$(7) \quad \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \operatorname{th} \frac{\alpha t}{2};$$

c'est la formule de M. Laisant pour l'angle amplitude.

De même, après avoir intégré l'équation (3'), ce qui donne

$$\frac{\omega}{\alpha} = \cos \theta,$$

on peut avoir recours à la relation (1); on a ainsi

$$\alpha dt = \frac{d\theta}{\cos \theta}$$

et, par suite,

$$\alpha t = \operatorname{Log tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right);$$

c'est la relation (7) résolue cette fois par rapport à t .

REMARQUE. — Les valeurs de l'accélération tangentielle et de l'accélération normale sont respectivement

$$R \frac{d\omega}{dt} = \frac{-R \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha t}{\operatorname{ch}^2 \alpha t} = -R \alpha^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$R \omega^2 = \frac{R \alpha^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha t} = R \alpha^2 \cos^2 \theta;$$

si λ désigne l'angle du vecteur MO avec le vecteur accélération, on a donc

$$\operatorname{tang} \lambda = \operatorname{tang} \theta, \quad \lambda = \theta;$$

en désignant par I le point où la direction du vecteur accélération rencontre l'axe polaire, le triangle OIM est isoscèle.

On a ce Tableau :

t	$-\infty$	$-t'$	0	$+t'$	$+\infty$
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$+\frac{\pi}{4}$	$+\frac{\pi}{2}$
ω	0	$\frac{x\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{x\sqrt{2}}{2}$	0
$\frac{d\omega}{dt}$	0	Max.	0	Min.	0