NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

# Certificat d'analyse supérieure

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 10 (1910), p. 463-470

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__463_0>

# CERTIFICAT D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

## Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. COURS. — *Méthodes d'approximation dans les intégrales définies. Exposer les méthodes de Côtes, de Gauss.*

II. PROBLÈME. — *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$2y^3\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2y^2\frac{\partial z}{\partial y}+9x^2yz+12x^2=0:$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface* S *qui vérifie cette équation et qui passe par la courbe dont les équations sont*

$$x=y,\qquad yz+3y=1.$$

*Déterminer les lignes asymptotiques de la surface ainsi définie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^4\frac{d^4y}{dx^4}+7x^3\frac{d^3y}{dx^3}+7x^2\frac{d^2y}{dx^2}-6x\frac{dy}{dx}-2y=\mathrm{X},$$

$$\mathrm{X}=-16x-\frac{54}{x}+x^2[297+324\log x+81(\log x)^2].$$

(Novembre 1909.)

## Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère la surface*

$$x=3u+3uv^2-u^3,$$
$$y=3v+3u^2v-v^3,$$
$$z=3u^2-3v^2:$$

1° *Trouver ses lignes de courbure. Démontrer qu'elles sont planes. Trouver leurs plans;*

2° *Trouver ses lignes asymptotiques. Sous quel angle se coupent-elles? Quelle particularité présente la surface?*

3° *Comment a-t-on, sans calcul, une carte géographique de la surface (conservant les angles)?*

4° *Démontrer que* $\theta = x$, $\theta = y$, $\theta = z$ *sont trois solutions de l'équation*

$$(1 + u^2 + v^2)\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - 2v\frac{\partial \theta}{\partial u} - 2u\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

*Déduire de là un nouveau moyen d'avoir les lignes de courbure.*

II. *Développer* $\frac{x^2}{4}$ *en série trigonométrique entre* $-\pi$ *et* $\pi$. *Que devient la série obtenue pour* $x = 0$ *et* $x = \pi$?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit*

$$z = x\,\mathrm{L}(xy)$$

*l'équation d'une surface (en coordonnées rectangulaires).*

*Évaluer, à* $1^{\mathrm{mm}^3}$ *près, le volume compris entre cette surface, le plan* $Oxy$, *le plan* $Oxz$, *le plan* $z = 3x$, *le plan* $x = 1^{\mathrm{cm}}$. (Juillet 1909.)

COMPOSITION. — *Considérant la surface* S *définie par*

$$ae^x + be^y + ce^z = 1:$$

1° *Déterminer la courbe de contact* $C_0$ *de* S *avec le cylindre circonscrit dont les génératrices ont* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *pour paramètre;*

2° *Démontrer que les courbes de contact* C *de* S *avec les cylindres dont les génératrices ont pour paramètres directeurs*

$$\frac{\alpha}{1-\alpha u}, \quad \frac{\beta}{1-\beta u}, \quad \frac{\gamma}{1-\gamma u},$$

$u$ *étant arbitraire, sont superposables à la courbe* $C_0$;

3° *Former l'équation du cône directeur des génératrices de tous ces cylindres;*

4° *Montrer que, en chaque point* P *de* S, *se rencontrent deux courbes* C, *et calculer les coordonnées de* P *en fonction des valeurs du paramètre $u$ qui correspondent à ces deux courbes;*

5° *Vérifier que ces deux courbes* C *sont conjuguées.*

Épreuve pratique. — 1° *Intégrer l'équation*

$$\frac{dy}{dx}\cos 2x + 2y \operatorname{tang} x + y^2 = 0;$$

2° *Intégrer l'équation*

$$a\frac{dy}{dx}\cos 2x = 3y^2 - 8y - 3$$

*et vérifier que le rapport anharmonique de quatre solutions particulières est constant.*

(Novembre 1909.)

## Lille.

I. Question de cours. — *Démontrer que toute courbe algébrique de genre* 1 *peut être, par une transformation birationnelle, transformée en une courbe du troisième ordre. Plus généralement, démontrer que toute courbe algébrique de genre $p$ peut être transformée, de la même manière, en une courbe d'ordre $p+2$.*

II. Problème. — *Pour que les courbes intégrales de l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

*forment un système isotherme, il faut et il suffit que la fonction $f$ satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. Former cette équation de condition et, en la supposant vérifiée, en déduire un facteur d'intégrabilité de l'équation* (1).

(Novembre 1909.)

## Marseille.

Composition écrite. — *On considère une surface* $\Sigma$ *enveloppe d'une sphère variable* S *qui se déplace de sorte que son centre* C *décrive une circonférence donnée* O *et que son rayon soit constamment égal à la distance* CD *du point* C *à un diamètre fixe* A'A :

1° *Démontrer que ce mode de génération de la surface* $\Sigma$ *fait connaître immédiatement sur celle-ci une première série de lignes de courbure, et l'un des rayons de courbure principaux en chacun de ses points*;

2° *Former l'équation générale d'un plan assujetti à passer sans cesse par la tangente à la circonférence* O *et à toucher une surface développable* D *dont chaque génératrice soit normale à la surface* $\Sigma$;

3° *En déduire les équations qui font connaître une ligne de courbure de la deuxième série; démontrer que chacune de ces lignes est dans un plan passant par* AA';

4° *Calculer l'angle sous lequel ce plan coupe la surface* $\Sigma$ *et expliquer pourquoi cet angle est le même en tous les points d'une même ligne de courbure de la deuxième série.*

SOLUTION.

La caractéristique du plan a pour équations

$$\cos\theta(x - a\cos\theta) + \sin\theta(y - a\sin\theta) + \lambda z = 0,$$
$$-\sin\theta(x - a\cos\theta) + \cos\theta(y - a\sin\theta) + \lambda' z = 0$$

et pour paramètres directeurs

$$\lambda'\sin\theta - \lambda\cos\theta, \quad -\lambda\sin\theta - \lambda'\cos\theta, \quad +1.$$

Cette caractéristique doit être sur le cône-normalie de sommet C dont l'équation est

$$\cos^2\theta[(x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 + z^2]$$
$$= [\sin\theta(x - a\cos\theta) - \cos\theta(y - a\sin\theta)]^2,$$

d'où l'équation différentielle

$$\cos^2\theta \left[\frac{d\lambda^2}{d\theta^2} + \lambda^2 + 1\right] = \frac{d\lambda^2}{d\theta^2}.$$

Elle a pour intégrale générale

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(A\sin\theta - \frac{1}{A\sin\theta}\right).$$

En joignant aux équations de la caractéristique la valeur de $\lambda$ et l'équation

$$x\sin\theta + y\cos\theta = a\sin\theta\cos\theta,$$

on trouve

$$y = \frac{2a\sin^3\theta}{A^2\sin^2\theta + 1}, \qquad z = Ay.$$

Enfin on trouve pour l'angle demandé $\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}$; c'est l'azimut du plan de la ligne de courbure par rapport au plan $zOx$.

Épreuve pratique. — 1° *Calculer l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z-1}}$$

*le long d'un cercle de rayon inférieur à 2 et dont le centre est au point* $z_0 = -1$;

2° *Calculer la limite de la même intégrale le long d'un cercle de rayon infiniment petit entourant le point* $z_1 = +1$;

3° *Calculer la limite de la même intégrale le long d'un cercle de rayon infiniment grand ayant pour centre l'origine;*

4° *Déduire des calculs précédents la valeur de l'intégrale réelle*

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}.$$

*Vérifier directement le résultat et calculer la valeur numérique de cette intégrale à* 0,001 *près.*

SOLUTION.

1° $\pi\sqrt{2}$; 2° et 3° zéro; 4° $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 2,22$.

(Novembre 1909.)

## Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne l'équation*

$$u^3 - 3u + 2z^2 = 0,$$

*qui définit u comme fonction algébrique de z :*

1° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de la fonction u? Quelle est la nature du point $z = \infty$ relativement à cette fonction? Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points et en calculer les premiers coefficients;*

2° *Construire la surface de Riemann corrélative de l'équation proposée;*

3° *Former l'équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre, à laquelle satisfont les branches de la fonction u;*

4° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de cette équation différentielle? Écrire l'équation déterminante relative à chacun d'eux et distinguer ceux qui sont vraiment singuliers, et non à apparence singulière. Examiner le cas du point $z = \infty$.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit*

$$v = \frac{u^3 + (z^2 + 4)(u^2 + 4u + 16)}{(z - 2)^2}$$

*une fonction rationnelle de u et de z, u désignant la fonc-*

*tion algébrique de z définie par l'équation*

$$u^2 = z^4 - 16.$$

*Déterminer ses pôles et ses zéros, à distance finie ou infinie, ainsi que ses développements en série dans le domaine de ces points. On calculera les résidus et les premiers coefficients de ces développements.*

(Juin 1909.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soit l'équation différentielle linéaire et homogène*

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p\frac{du}{dz} + qu = 0,$$

*$p$ et $q$ étant des fonctions de $z$. On suppose que ces deux fonctions sont développables en séries entières en $z - z_0$, absolument convergentes pour $|z - z_0| \leqq R$.*

*Démontrer qu'en désignant par $a_0$ et $a_1$ deux nombres arbitraires, il existe une série de la forme*

$$a_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \ldots$$

*dans laquelle les coefficients $a_2$, $a_3$, ... sont déterminés, convergente pour $|z - z_0| < R$, et qui satisfait identiquement à l'équation différentielle.*

II. *On considère l'équation*

$$(u-1)^2(u-2)^3 - z^2(u-z)^2 = 0$$

*qui définit $u$ comme fonction algébrique de $z$ :*

1° *Construire la courbe représentée par cette équation;*

2° *Quels sont les points singuliers de la fonction algébrique?*

3° *Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sachant que les racines de l'équa-*

*tion*

$$u^3 - 3u + 6z = 0$$

*satisfont à l'équation différentielle*

$$(9z^2 - 1)\frac{d^2u}{dz^2} + 9z\frac{du}{dz} - u = 0,$$

*employer cette dernière à calculer, dans le domaine de l'origine, le développement en série de la racine qui, pour* $z = 0$, *a la valeur initiale zéro.* (Octobre 1909.)