

**Concours d'admission à l'École normale
supérieure et aux bourses de licence en 1910.
Composition de Mathématiques (Sciences I)**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 436-460

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__436_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1910.**

**Composition de Mathématiques
(Sciences I).**

PREMIÈRE COMPOSITION.

I. Soit (G) la courbe définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations

$$x = \frac{1-t^2}{t}, \quad y = 1+t^2,$$

où t est un paramètre arbitraire.

1° Déterminer un polynome du second degré $f(x, y)$ (dans lequel le coefficient de y^2 est 1) tel qu'on ait une identité de la forme

$$t^2 f\left(\frac{1+t^2}{t}, 1+t^2\right) = (t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2.$$

On montrera qu'une telle identité n'est possible que moyennant l'existence d'une relation entre les constantes α, β, γ . Cette relation se décompose en deux autres très simples.

2° Supposant successivement vérifiée chacune de ces deux relations, les coefficients de $f(x, y)$ se trouvent, dans chaque cas, exprimés au moyen de deux des paramètres α, β, γ . Pour l'une des solutions, le polynome $f(x, y)$ est le carré d'un polynome du premier degré en x, y .

Des résultats précédents on déduit immédiatement la réponse aux questions suivantes :

3° Écrire la condition que doivent vérifier les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points de (G) pour que ces trois points soient en ligne droite.

4° Écrire la condition que doivent vérifier les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points de (G) pour qu'il existe une conique (C) tangente à (G) en ces trois points.

5° Former l'équation générale des coniques (C).

En outre :

6° Trouver, lorsque la conique (C) se décompose en deux droites, le lieu du point de concours des deux droites.

7° Montrer que les tangentes aux trois points de contact de (C) et de (G) coupent encore la courbe (G) en trois autres points situés sur une même droite (D).

8° Trouver l'équation générale de la droite (D)

en fonction des mêmes paramètres que ceux qui déterminent la conique correspondante (C).

9° Déterminer en fonction des mêmes paramètres le centre de gravité P du triangle formé par les points de contact de (C) et de (G).

10° Trouver l'enveloppe de la droite (D) lorsque P décrit une parallèle à l'axe des x .

II. Une surface (Σ), rapportée à des axes rectangulaires, est coupée par chaque plan parallèle au plan xOy suivant une courbe fermée. L'aire S de cette courbe est une fonction déterminée [$S = f(z)$] de la cote z de tous ses points. On suppose la surface (Σ) continue et l'on suppose que la fonction $f(z)$ admet des dérivées continues jusqu'au cinquième ordre inclusivement.

Déterminer quelle doit être la forme la plus générale de la fonction $f(z)$ pour que le volume compris entre la surface (Σ) et les plans de cotes z_0 et z soit donné, quels que soient z_0 et z , par la formule

$$V = \frac{z - z_0}{6} \left[f(z) + f(z_0) + 4f\left(\frac{z + z_0}{2}\right) \right].$$

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

I.

1. Soit

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + y^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

On a alors

$$\begin{aligned} t^2 f\left(\frac{1+t^2}{t}, 1+t^2\right) \\ = t^6 + 2Bt^5 + (A + 2 + 2E)t^4 + (4B + 2D)t^3 \\ + (2A + 1 + 2E + F)t^2 + (2B + 2D)t + A. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(\ell^3 + \alpha \ell^2 + \beta \ell + \gamma)^2 = \ell^6 + 2\alpha \ell^5 + (\alpha^2 + 2\beta)\ell^4 + (2\gamma + 2\alpha\beta)\ell^3 \\ + (2\alpha\gamma + \beta^2)\ell + 2\beta\gamma\ell + \gamma^2.$$

En identifiant ces deux expressions, on a, pour déterminer les coefficients du polynome $f(x, y)$, les relations

$$\begin{aligned} B &= \alpha, \\ A + 2 + 2E &= \alpha^2 + 2\beta, \\ 2B + D &= \gamma + \alpha\beta, \\ 2A + 1 + 2E + F &= 2\alpha\gamma + \beta^2, \\ B + D &= \beta\gamma, \\ A &= \gamma^2. \end{aligned}$$

La première, la troisième et la cinquième ne contenant que B et D, on peut éliminer B et D entre elles, et l'on obtient la relation

$$\alpha + \beta\gamma = \gamma + \alpha\beta,$$

qui s'écrit

$$(\alpha - \gamma)(1 - \beta) = 0,$$

et se décompose en

$$\alpha = \gamma \quad \text{ou} \quad \beta = 1.$$

2. Les cinq relations autres que la troisième donnent

$$\begin{aligned} A &= \gamma^2, & B &= \alpha, & D &= \beta\gamma - \alpha, \\ 2E &= \alpha^2 - \gamma^2 + 2(\beta - 1), & F &= (\beta - 1)^2 - (\alpha - \gamma)^2. \end{aligned}$$

Si l'on prend d'abord $\alpha = \gamma$, elles deviennent

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2, & B &= \alpha, & D &= \alpha(\beta - 1), \\ E &= \beta - 1, & F &= (\beta - 1)^2. \end{aligned}$$

Dans ce cas $f(x, y)$ est un carré parfait :

$$f(x, y) = (\alpha x + y + \beta - 1)^2.$$

La conique (C) se réduit à une droite double.

Si l'on prend ensuite $\beta = 1$, on a

$$\begin{aligned} A &= \gamma^2, & B &= \alpha, & D &= \gamma - \alpha, \\ 2E &= \alpha^2 - \gamma^2, & F &= -(\alpha - \gamma)^2, \end{aligned}$$

et le polynome $f(x, y)$ prend la forme

$$\gamma^2 x^2 + 2\alpha xy + y^2 - 2(\alpha - \gamma)x + (\alpha^2 - \gamma^2)y - (\alpha - \gamma)^2.$$

3. Pour que trois points de (G) soient en ligne droite, sur la droite

$$\alpha x + y + \beta - 1 = 0,$$

il faut et il suffit que les paramètres t_1, t_2, t_3 correspondants soient racines de l'équation ($\gamma = \alpha$)

$$t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \alpha = 0,$$

et il est manifesté que les racines de cette équation vérifient la relation

$$(1) \quad t_1 + t_2 + t_3 = t_1 t_2 t_3.$$

4. Pour qu'une conique (C) dont l'équation est

$$f(x, y) = 0$$

soit triplement tangente à (G), il faut et il suffit que l'équation aux t des points d'intersection

$$t^2 f\left(\frac{1+t^2}{t}, 1+t^2\right) = 0$$

soit carré parfait, sans que $f(x, y)$ le soit. Or, d'après ce qui précède, ceci aura lieu lorsque la conique a pour équation

$$(2) \quad \begin{aligned} \gamma^2 x^2 + 2\alpha xy + y^2 - 2(\alpha - \gamma)x \\ + (\alpha^2 - \gamma^2)y - (\alpha - \gamma)^2 = 0, \end{aligned}$$

et alors ($\beta = 1$) l'équation aux t des points de contact

est

$$t^3 + \alpha t^2 + t + \gamma = 0.$$

Ses trois racines satisfont manifestement à la relation

$$(3) \quad t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2 = 1.$$

5. L'équation (2) fournit l'équation générale des coniques (C). Elle dépend de deux paramètres α et γ .

6. Il est évident que lorsque la conique (2) se décompose en deux droites, le point d'intersection de ces deux droites est situé sur (G); car chacune des deux droites ne pouvant être tangente à (G) qu'en un point, le troisième point double d'intersection est nécessairement le sommet de l'angle formé par les deux droites. Le lieu de ce point est donc la courbe (G).

C'est ce qu'on vérifie par le calcul. Pour que la conique (2) se réduise à un système de deux droites il faut et il suffit que les équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f'_x &= \gamma^2 x + \alpha y - (\alpha - \gamma) = 0, \\ f'_y &= 2\alpha x + 2y + \alpha^2 - \gamma^2 = 0, \\ \frac{1}{\alpha - \gamma} f'_z &= -2x + (\alpha + \gamma)y - 2(\alpha - \gamma) = 0 \end{aligned}$$

aient une solution commune.

Des deux premières on tire

$$(4) \quad \begin{cases} x = -\frac{2 + \alpha(\alpha + \gamma)}{2(\alpha + \gamma)}, \\ y = \frac{2\alpha + \gamma^2(\alpha + \gamma)}{2(\alpha + \gamma)}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans la troisième, elle devient

$$[\gamma(\alpha + \gamma) + 2]^2 = 0.$$

On en tire

$$\alpha + \gamma = -\frac{2}{\gamma}, \quad \alpha = -\frac{\gamma^2 + 2}{\gamma}.$$

En portant ces valeurs de α et $\alpha + \gamma$ dans les équations (4), elles deviennent

$$x = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma},$$

$$y = 1 + \gamma^2.$$

Elles prouvent que le point de concours des deux droites est le point de (G) qui correspond à la valeur $t = \gamma$ du paramètre.

7. Soient t'_1, t'_2, t'_3 les paramètres des points d'intersection des tangentes à (G) aux points t_1, t_2, t_3 .

En appliquant la relation (1) au cas limite où parmi les trois points en ligne droite il y en a deux confondus, on a

$$2t_1 + t'_1 = t_1^2 t'_1,$$

d'où

$$t'_1 = \frac{2t_1}{t_1^2 - 1}.$$

On aurait de même

$$t'_2 = \frac{2t_2}{t_2^2 - 1},$$

$$t'_3 = \frac{2t_3}{t_3^2 - 1}.$$

Il suffit de prouver qu'on a

$$t'_1 + t'_2 + t'_3 = t'_1 t'_2 t'_3$$

ou

$$\frac{2t_1}{t_1^2 - 1} + \frac{2t_2}{t_2^2 - 1} + \frac{2t_3}{t_3^2 - 1} = \frac{8t_1 t_2 t_3}{(t_1^2 - 1)(t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1)}$$

ou encore

$$(5) \quad \Sigma t_1(t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1) - 8t_1 t_2 t_3 = 0,$$

lorsque les trois points t_1, t_2, t_3 sont alignés. Or on a l'identité

$$\Sigma t_1(t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1) - 8t_1t_2t_3 = 2[\Sigma t_2t_3 - 1][t_1t_2t_3 - \Sigma t_1].$$

Elle prouve que l'égalité (5) est vérifiée, d'une part, lorsque

$$t_1t_2t_3 = \Sigma t_1,$$

c'est-à-dire lorsque les trois points de contact t_1, t_2, t_3 sont en ligne droite, la conique (C) étant une droite double ($\alpha = \gamma$); et, d'autre part, lorsque

$$\Sigma t_2t_3 = 1,$$

c'est-à-dire lorsque la conique (C) est triplement tangente à la cubique (G).

8. Les paramètres t_1, t_2, t_3 sont racines de l'équation

$$(6) \quad t^3 + \alpha t^2 + t + \gamma = 0.$$

L'équation qui donne les valeurs de t' est la transformée en

$$(7) \quad t' = \frac{2t}{t^2 - 1}.$$

Pour la former, il suffit d'éliminer t entre les équations (6) et (7), ce qui donne, tous calculs faits,

$$[(\alpha + \gamma)^2 - 4]t'^3 + 8\gamma t'^2 + 4(\alpha\gamma - 1)t' + 8\gamma = 0.$$

Cette équation est bien de la forme

$$t'^3 + \alpha' t'^2 + \beta' t' + \alpha' = 0,$$

où

$$\alpha' = \frac{8\gamma}{(\alpha + \gamma)^2 - 4}, \quad \beta' = \frac{4(\alpha\gamma - 1)}{(\alpha + \gamma)^2 - 4}.$$

En vertu des résultats du n° 3 ci-dessus, cela prouve que les trois points sont en ligne droite sur la droite D qui a pour équation

$$\alpha'x + y + \beta' - 1 = 0$$

ou

$$8\gamma x + [(\alpha + \gamma)^2 - 4]y - (\alpha - \gamma)^2 = 0.$$

9. Les coordonnées du centre de gravité P du triangle formé par les trois points t_1, t_2, t_3 sont

$$\xi = \frac{1}{3} \sum \frac{1+t_i^2}{t_i} = \frac{1}{3t_1t_2t_3} [\Sigma t_2t_3 + t_1t_2t_3\Sigma t_1],$$

$$\eta = \frac{1}{3} \Sigma(1+t_i^2) = \frac{1}{3} [3 + (\Sigma t_1)^2 - 2\Sigma t_2t_3].$$

Comme t_1, t_2, t_3 sont racines de l'équation (6), on a

$$\Sigma t_1 = -\alpha, \quad \Sigma t_2t_3 = 1, \quad t_1t_2t_3 = -\gamma,$$

et, par suite,

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\frac{1+\alpha\gamma}{3\gamma}, \\ \eta = \frac{1+\alpha^2}{3}. \end{array} \right.$$

10. Lorsque P décrit une parallèle à l'axe des x , η , et par suite α , reste constant.

L'équation de la droite (D) s'écrit

$$(y-1)\gamma^2 + 2[4x + \alpha y + \alpha]\gamma + (\alpha^2 - 4)y - \alpha^2 = 0.$$

Son enveloppe, lorsque α reste constant et que γ varie, est la conique qui a pour équation

$$(y-1)[\alpha^2(y-1) - 4y] - [4x + \alpha(y+1)]^2 = 0.$$

L'ensemble des termes du second degré est

$$(\alpha^2 - 4)y^2 - (4x + \alpha y)^2,$$

qui se présente ainsi décomposé en deux carrés indépendants.

Si $\alpha^2 > 4$, $(\eta > \frac{5}{3})$, les deux carrés sont de signes contraires, la courbe enveloppe est une hyperbole.

Si $\alpha^2 = 4$, $(\eta = \frac{5}{3})$, l'ensemble des termes du second degré est carré parfait, l'enveloppe est une parabole.

Enfin si $\alpha^2 < 4$, $(\eta < \frac{5}{3})$, les deux carrés sont de même signe et l'enveloppe est une ellipse.

II.

D'après l'énoncé on doit avoir

$$(8) \quad \int_{z_0}^z f(z) dz = \frac{z - z_0}{6} [f(z) + f(z_0) + 4f(z_1)],$$

en posant

$$z_1 = \frac{z_0 + z}{2}.$$

Cette égalité devant être vérifiée quels que soient z et z_0 , ses dérivées par rapport à z ou à z_0 le sont aussi.

En dérivant par rapport à z , on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{6} [f(z) + f(z_0) + 4f(z_1)] \\ &\quad + \frac{z - z_0}{6} [f'(z) + 2f'(z_1)]. \end{aligned}$$

Dérivons cette dernière par rapport à z_0 , il vient

$$f'(z) - f'(z_0) = (z - z_0)f''(z_1).$$

En dérivant une dernière fois par rapport à z , on

obtient enfin

$$f''(z) = f''(z_1) + \frac{z - z_0}{2} f'''(z_1).$$

qui s'écrit

$$f''(z) - f''(z_1) = (z - z_1) f'''(z_1).$$

Si, dans cette égalité, on laisse z_1 fixe, ce qui est permis, car z_1 est aussi arbitraire que z_0 , elle prouve que $f''(z)$ est *linéaire* en z et, par suite, que $f(z)$ est un *polynôme du troisième degré* en z .

Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante; car si l'on pose

$$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d,$$

il est facile de vérifier que l'égalité (8) est toujours satisfaite.

On peut remarquer que la démonstration précédente n'a besoin d'admettre l'existence des dérivées de $f'(z)$ que jusqu'au troisième ordre.

Composition de Mathématiques

(Sciences I).

SECONDE COMPOSITION.

I. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz , *et une fonction* $f(z)$ *qui admet une dérivée* $f'(z)$, *les équations*

$$(1) \quad \begin{cases} x = \rho x_0, \\ y = \rho y_0, \\ \int_{z_0}^z \frac{dz}{f(z)} = t, \end{cases} \quad \left(\rho = \sqrt{\frac{f(z_0)}{f(z)}} \right)$$

où t désigne le temps, définissent le mouvement d'un point $M(x, y, z)$, si l'on connaît la position $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de ce point à l'instant $t = 0$; quand on a fixé la valeur de t , les mêmes équations (1) définissent une transformation remplaçant le point M_0 par le point M .

1° Montrer que les projections de la vitesse du point $M(x, y, z)$ sur les axes Ox , Oy , Oz peuvent s'exprimer par des fonctions de x , y , z qui ne contiennent ni le temps t , ni les coordonnées initiales x_0, y_0, z_0 .

2° A tous les points d'un cercle (C_0) ayant pour équations

$$(x_0 - a_0)^2 + y_0^2 = R_0^2 \quad (a_0, R_0 \text{ constants})$$

$$z_0 = \text{const.}$$

correspondent, à l'instant t , d'après les équations (1), des points M tous situés sur un cercle (C) dont le plan est parallèle au plan xOy . Calculer, en fonction du z de ce plan, le rayon R et l'abscisse a du centre du cercle (C) .

3° Soient S la surface engendrée par le cercle (C) quand t varie à partir de zéro, (T) le solide limité par la surface (S) et par les plans $z = z_1, z = z_2$.

Vérifier que le volume V de (T) ne dépend que de la différence des valeurs de t qui correspondent à z_2 et à z_1 .

Effectuer jusqu'au bout les calculs et construire la trajectoire d'un point M dans les deux cas suivants :

Premier cas

$$f(z) = \frac{k^2}{2z} \quad (k \text{ constant});$$

Deuxième cas

$$f(z) = k \frac{z^2 + k^2}{z^2} \quad (k \text{ constant}).$$

Calculer, dans chacun des deux cas précédents, les coordonnées $(\xi, 0, \zeta)$ du centre de gravité du solide (T) supposé homogène, en se servant des formules

$$V\xi = \int_{z_1}^{z_2} a(z) A(z) dz \quad \text{et} \quad V\zeta = \int_{z_1}^{z_2} z A(z) dz$$

où $A(z)$ désigne l'aire et $a(z)$ l'abscisse du centre du cercle (C) de cote z .

II. Construire la courbe dont l'équation est

$$y = \operatorname{tang} x - x.$$

Trouver, avec deux décimales, la racine comprise entre 1 et 1,1 de l'équation

$$\operatorname{tang} r - x = \frac{\pi}{4}.$$

SOLUTION

Par JLAN SERVAIS.

I.

I. On a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dt} x_0,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dt} y_0,$$

$$\frac{dz}{dt} = f(z).$$

D'ailleurs, comme

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{2} \frac{f'(z)}{f(z)},$$

on en conclut, pour les composantes de la vitesse,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\rho x_0}{2} f'(z) = -\frac{x}{2} f'(z),$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\rho y_0}{2} f'(z) = -\frac{y}{2} f'(z),$$

$$\frac{dz}{dt} = f(z).$$

La trajectoire du point mobile est *plane* et située dans le plan

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}.$$

2. Les équations du cercle (C) s'obtiennent en remplaçant, dans celles de (C₀), x_0 par $\frac{x}{\rho}$ et y_0 par $\frac{y}{\rho}$. Ces équations sont donc

$$(x - a_0 \rho)^2 + y^2 = R_0^2 \rho^2,$$

$$z = \text{const.}$$

Le rayon R et l'abscisse a du centre de ce cercle sont donc

$$R = R_0 \rho, \quad a = a_0 \rho.$$

3. L'aire du cercle (C) étant égale à $\pi R_0^2 \rho^2$, le volume V engendré par le cercle lorsque t varie de t_1 à t_2 est

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \pi R_0^2 \rho^2 dz = \pi R_0^2 f(z_0) \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{f(z)},$$

$$(1) \quad V = \pi R_0^2 f(z_0) (t_2 - t_1).$$

Les coordonnées du centre de gravité de ce volume

(450)

sont données par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} V\xi = \pi a_0 R_0^2 \int_{z_1}^{z_2} \rho^2 dz, \\ V\zeta = \pi R_0^2 \int_{z_1}^{z_2} \rho^2 z dz. \end{cases}$$

1° Supposons $f(z) = \frac{k^2}{2z}$.

On a alors

$$t = \int_{z_0}^z \frac{2z dz}{k^2} = \frac{z^2 - z_0^2}{k^2},$$
$$\rho = \sqrt{\frac{z}{z_0}}.$$

La trajectoire est alors la demi-parabole intersection du plan

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$$

avec le demi-cylindre parabolique

$$x = \sqrt{\frac{z}{z_0}} x_0.$$

En appliquant les formules (1) et (2), on a

$$V = \frac{\pi R_0^2}{2 z_0} (z_2^2 - z_1^2),$$
$$V\xi = \frac{2}{3} \frac{\pi a_0 R_0^2}{z_0^{\frac{3}{2}}} \left(z_2^{\frac{5}{2}} - z_1^{\frac{5}{2}} \right),$$
$$V\zeta = \frac{1}{3} \frac{\pi R_0^2}{z_0} (z_2^3 - z_1^3).$$

D'où l'on tire

$$\xi = \frac{4}{5} \frac{a_0}{z_0^{\frac{1}{2}}} \frac{z_2^{\frac{5}{2}} - z_1^{\frac{5}{2}}}{z_2^2 - z_1^2},$$
$$\zeta = \frac{2}{3} \frac{z_2^3 - z_1^3}{z_2^2 - z_1^2}.$$

(451)

2° *Supposons*

$$f(z) = k \frac{z^2 + k^2}{z^2}.$$

On a alors

$$t = \int_{z_0}^z \frac{z^2 dz}{k(z^2 + k^2)} = \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{z^2 + k^2} \right) dz,$$

$$t = \frac{z - z_0}{k} - \left(\text{arc tang} \frac{z}{k} \right)_{z_0}^z,$$

$$\rho = \frac{z}{z_0} \sqrt{\frac{z_0^2 + k^2}{z^2 + k^2}}.$$

La trajectoire est la portion de quartique, située dans le plan

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0},$$

dont la projection sur le plan des zx a pour équation

$$\frac{x}{x_0} = \frac{z}{z_0} \sqrt{\frac{z_0^2 + k^2}{z^2 + k^2}},$$

ou, en la rendant entière,

$$z^2 x^2 z_0^2 - z^2 z_0^2 x_0^2 + k^2 (x^2 z_0^2 - x_0^2 z^2) = 0.$$

C'est une quartique unicursale qui présente un point double à l'origine et deux autres points doubles à l'infini sur les axes Ox et Oz .

En écrivant l'équation sous la forme

$$z^2 z_0^2 (x - x_0)(x + x_0) + k^2 (xz_0 - x_0 z)(xz_0 + x_0 z) = 0,$$

on met en évidence les quatre droites

$$\begin{aligned} x &= x_0, & x &= -x_0, \\ xz_0 - x_0 z &= 0, & xz_0 + x_0 z &= 0 \end{aligned}$$

qui séparent des régions.

(452)

En la mettant sous la forme

$$z^2 x^2 z_0^2 + k^2 z_0^2 x^2 - (k^2 + z_0^2) x_0^2 z^2 = 0,$$

on met en évidence les deux tangentes à l'origine

$$k z_0 x \pm \sqrt{k^2 + z_0^2} x_0 z = 0,$$

et l'on voit, en outre, que la courbe est tout entière située dans l'angle de ces deux droites qui comprend l'axe Oz .

Enfin en mettant l'équation sous la forme

$$z^2 [x^2 z_0^2 - (k^2 + z_0^2) x_0^2] + k^2 z_0^2 x^2 = 0,$$

on met en évidence les deux asymptotes réelles parallèles à Oz

$$x z_0 \pm x_0 \sqrt{k^2 + z_0^2} = 0,$$

et l'on voit également que la courbe est tout entière comprise entre ces deux parallèles.

Enfin la courbe est symétrique par rapport aux deux axes.

La forme est alors parfaitement déterminée, comme l'indique la figure ci-contre.

En appliquant les formules (1) et (2), on a

$$V = \pi k R_0^2 \frac{z_0^2 + k^2}{z_0^2} \left[\frac{z_2 - z_1}{k} - \left(\text{arc tang } \frac{z}{k} \right)_{z_1}^{z_2} \right],$$

$$V\xi = \pi \alpha_0 R_0^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^3 (z_0^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{z_0^3 (z^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} dz,$$

$$V\zeta = \pi R_0^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2 (z_0^2 + k^2)}{z_0^2 (z^2 + k^2)} z dz.$$

Les deux intégrales précédentes se calculent aisé-

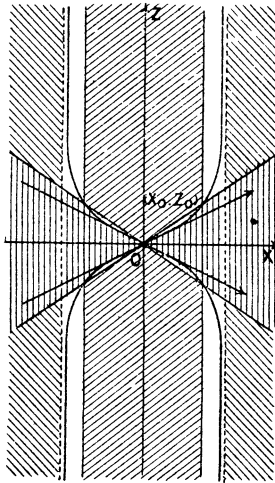
ment dès qu'on remarque qu'elles ne dépendent que de z^2 .

Posons

$$u = \sqrt{z^2 + k^2}, \quad u_1 = \sqrt{z_1^2 + k^2}, \quad u_2 = \sqrt{z_2^2 + k^2}.$$

Il vient

$$u \, du = z \, dz,$$



et l'on a

$$\begin{aligned} V\xi &= \frac{\pi a_0 R_0^2 (z_0^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{z_0^3} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 - k^2}{u^2} du \\ &= \frac{\pi a_0 R_0^2 (z_0^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{z_0^3} \left[u_2 - u_1 + k \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V\zeta &= \frac{\pi R_0^2 (z_0^2 + k^2)}{z_0^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 - k^2}{u} du \\ &= \frac{\pi R_0^2 (z_0^2 + k^2)}{z_0^2} \left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - k^2 \log \frac{u_2}{u_1} \right). \end{aligned}$$

II.

La courbe qui a pour équation

$$y = \operatorname{tang} x - x$$

est bien connue; on l'obtient en ajoutant les ordonnées de la courbe

$$y = \operatorname{tang} x$$

et de la droite

$$y = -x.$$

L'équation

$$f(x) = \operatorname{tang} x - x - \frac{\pi}{4} = 0$$

a une racine et une seule comprise dans l'intervalle de continuité $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$. En effet, la dérivée de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang}^2 x$$

étant toujours positive, la fonction $f(x)$ croît de $-\infty$, pour $x = -\frac{\pi}{2}$, jusqu'à $+\infty$, pour $x = +\frac{\pi}{2}$. Elle s'annule donc une seule fois dans l'intervalle.

L'arc de longueur 1 vaut $57^{\circ}17'$ et sa tangente est 1,5412.

L'arc de longueur 1,1 vaut $63^{\circ}2'$ et sa tangente est 1,9634.

Comme d'ailleurs $\frac{\pi}{4} = 0,7854$, on a

$$\begin{aligned} f(1) &= 1,5412 - 1,7854 = -0,2442 < 0, \\ f(1,1) &= 1,9634 - 1,8854 = +0,0780 > 0. \end{aligned}$$

La racine est donc bien comprise dans l'intervalle 1 et 1,1; et pour calculer une seconde décimale il suffit

d'appliquer la correction de Newton à la valeur approchée 1,1. On a

$$h = -\frac{f(1,1)}{f'(1,1)} = -\frac{0,0780}{(1,9634)^2} = -0,020.$$

La racine cherchée est donc, avec deux décimales exactes, par excès,

$$x = 1,1 - 0,02 = 1,08.$$

Composition de Mathématiques
(Sciences II).

1. On donne deux axes coordonnés rectangulaires Ox , Oy et une droite (D) parallèle à l'axe Oy .

A chaque point M d'une courbe (C), située dans le plan des deux axes, on fait correspondre un point M', de même abscisse que le point M, par la condition que la parallèle menée par l'origine à la tangente en M à la courbe (C) et la parallèle à l'axe Ox menée par le point M' se rencontrent sur la droite (D). Soit (C') le lieu décrit par le point M' quand le point M décrit la courbe (C). Soit M'' le point qui se déduit du point M' comme le point M, en remplaçant toutefois la courbe (C) par la courbe (C').

Déterminer la courbe (C) :

1° De manière qu'elle passe par l'origine et que la longueur MM' soit égale à une ligne donnée;

2° De manière qu'elle passe par l'origine, qu'elle y soit tangente à la bissectrice de l'angle xOy et que la longueur MM'' soit égale à une ligne donnée.

II. On considère le mouvement défini par les équations

$$\begin{aligned}x &= 3a \cos t - a^3 \cos 3t, & y &= 3a \sin t + a^3 \sin 3t, \\z &= 3a^2 \cos 2t,\end{aligned}$$

où t désigne le temps et a un paramètre constant. Déterminer la vitesse et l'accélération.

La trajectoire est une courbe fermée; quelle est sa longueur? Déterminer a de façon que cette longueur soit égale à 3π . (On se bornera à calculer deux décimales.)

III. Évaluer les deux intégrales définies

$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, \quad B = \int_0^{\frac{2\pi}{7}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

I.

Soit

$$x = a$$

l'équation de la droite (D). L'équation de la parallèle menée par l'origine à la tangente en $M(x, y)$ à la courbe (C) a pour équation

$$Y = \frac{dy}{dx} X.$$

Elle coupe la droite (D) au point de coordonnées

$$X = a, \quad Y = \frac{dy}{dx} a.$$

Les coordonnées du point M' sont alors

$$x' = x, \quad y' = Y = a \frac{dy}{dx}.$$

1° La longueur du segment $\overline{MM'}$ est

$$\overline{MM'} = y' - y = a \frac{dy}{dx} - y.$$

En écrivant que ce segment est égal à b , on obtient, pour déterminer la courbe (C), l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \quad a \frac{dy}{dx} - y = b,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = C e^{\frac{x}{a}} - b$$

Pour trouver la solution qui passe à l'origine, écrivons que pour $x = 0$ on a $y = 0$, ce qui donne

$$0 = C - b, \quad C = b;$$

et la courbe cherchée a pour équation

$$y = b \left(e^{\frac{x}{a}} - 1 \right).$$

2° Le point M'' se déduisant de M' , comme M' se déduit de M , les coordonnées de M'' sont

$$x'' = x', \quad y'' = a \frac{dy'}{dx'},$$

ou, en remplaçant x' et y' par leurs valeurs en fonction de x et y ,

$$x'' = x, \quad y'' = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

La longueur du segment $\overline{MM''}$ est alors

$$\overline{MM''} = y'' - y = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - y.$$

En écrivant que ce segment est égal à b , on a, pour déterminer la courbe (C), l'équation différentielle du

(458)

second ordre

$$(2) \quad a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - y = b,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = A e^{\frac{x}{a}} + B e^{-\frac{x}{a}} - b.$$

En écrivant que pour $x = 0$ on a : $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$,
il vient

$$A + B = b,$$

$$A - B = a.$$

On en tire

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad B = \frac{b-a}{2},$$

et l'équation de la courbe (C) est, dans ce cas,

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + \frac{b}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2 \right).$$

II.

Les composantes de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = -3a(\sin t - a^2 \sin 3t),$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a(\cos t + 3a^2 \cos 3t),$$

$$\frac{dz}{dt} = -6a^2 \sin 2t;$$

celles de l'accélération sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -3a(\cos t - 3a^2 \cos 3t),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -3a(\sin t + 3a^2 \sin 3t),$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -12a^2 \cos 2t.$$

La formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne, tous calculs faits,

$$ds^2 = 9a^2(1+a^2)^2 dt^2,$$

$$ds = 3a(1+a^2) dt.$$

Pour avoir la courbe entière, il suffit de faire varier t de 0 à 2π , on a donc

$$s = 3a(1+a^2) \int_0^{2\pi} dt = 6a\pi(1+a^2).$$

En égalant s à 3π , on a, pour déterminer a , l'équation

$$f(a) = 2a^3 + 2a - 1 = 0,$$

qui a une seule racine réelle et positive. Cette racine est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, car

$$f(0) = -1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

sont de signes contraires. En appliquant la correction de Newton à la racine $\frac{1}{2}$, on a

$$h = -\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{6}{4} + 2} = -\frac{1}{14}.$$

La nouvelle valeur approchée est donc

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{3}{7} = 0,428.$$

C'est la valeur approchée cherchée, par excès, car

$$f(0,428) > 0 \quad \text{et} \quad f(0,42) < 0,$$

comme il est facile de le vérifier.

III.

On a

$$A + B = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} dx = \frac{2\pi}{3},$$

$$B - A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{tang} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) dx,$$

$$B - A = \left| -\log \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \log \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)};$$

or

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right);$$

donc

$$B - A = \log \frac{2}{\sqrt{3} - 1},$$

$$A = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \log \frac{2}{\sqrt{3} - 1},$$

$$B = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{\sqrt{3} - 1}.$$