Nouvelles annales de mathématiques

V. Jamet

Sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 309-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__309_0>

[O4h]

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. V. JAMET.

Voici une nouvelle solution du problème résolu par M. Villat, dans le numéro de mars : *Exprimer les coordonnées d'un point, mobile sur une surface réglée, en fonction des paramètres de ses lignes asymptotiques.*

Soit S une telle ligne asymptotique. Par chacun de ses points passe une génératrice, contenue dans le plan osculateur de S; et l'on peut supposer celle-ci parcourue par un point mobile, de telle sorte que le vecteur accélération soit sans cesse dirigé suivant cette génératrice. Cette remarque suffit pour suppléer à un calcul un peu fastidieux, qui permet d'écrire les équations représentatives de la surface sous la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda\frac{d^2x_0}{dt^2},\\ y &= y_0 + \lambda\frac{d^2y_0}{dt^2},\\ z &= z_0 + \lambda\frac{d^2z_0}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

L'intégration de l'équation différentielle des lignes asymptotiques nous permettra d'exprimer λ, et par conséquent x, y, z, en fonction de t et d'une constante arbitraire v, qui sera le paramètre des lignes asymptotiques autres que les génératrices, celles-ci ayant pour paramètre t. Cette équation différentielle est, comme pour toute surface réglée, une équation de Ricati. Mais ici nous en connaissons d'avance la solution

$\lambda = 0$, ce qui nous permettra de pousser son intégration jusqu'aux quadratures. Cette équation a pour premier membre un déterminant dont je n'écrirai qu'une seule rangée verticale; le lecteur voudra bien former les deux autres en remplaçant la lettre x, successivement, par y et par z. Voici cette équation :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} + \lambda \dfrac{d^4 x_0}{dt^4} + 2 \dfrac{d\lambda}{dt} \dfrac{d^3 x_0}{dt^3} + \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} \dfrac{d\lambda}{dt} & \cdots \\ \dfrac{dx_0}{dt} + \lambda \dfrac{d^3 x_0}{dt^3} + \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} \dfrac{d\lambda}{dt} & \cdots \\ \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Après quelques transformations intuitives, elle devient

$$\begin{vmatrix} \lambda \dfrac{d^4 x_0}{dt^4} + 2 \dfrac{d\lambda}{dt} \dfrac{d^3 x_0}{dt^3} & \lambda \dfrac{d^4 y_0}{dt^4} + 2 \dfrac{d\lambda}{dt} \dfrac{d^3 y_0}{dt^3} & \lambda \dfrac{d^4 z_0}{dt^4} + 2 \dfrac{d\lambda}{dt} \dfrac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \dfrac{dx_0}{dt} + \lambda \dfrac{d^3 x_0}{dt^3} & \dfrac{dy_0}{dt} + \lambda \dfrac{d^3 y_0}{dt^3} & \dfrac{dz_0}{dt} + \lambda \dfrac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} & \dfrac{d^2 y_0}{dt^2} & \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

Soient

$$T = \begin{vmatrix} \dfrac{d^3 x_0}{dt^3} & \dfrac{d^3 y_0}{dt^3} & \dfrac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \dfrac{dx_0}{dt} & \dfrac{dy_0}{dt} & \dfrac{dz_0}{dt} \\ \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} & \dfrac{d^2 y_0}{dt^2} & \dfrac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix}, \qquad U = \begin{vmatrix} \dfrac{d^4 x_0}{dt^4} & \dfrac{d^4 y_0}{dt^4} & \dfrac{d^4 z_0}{dt^4} \\ \dfrac{d^3 x_0}{dt^3} & \dfrac{d^3 y_0}{dt^3} & \dfrac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} & \dfrac{d^2 y_0}{dt^2} & \dfrac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix}.$$

On observe que

$$\frac{dT}{dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{d^4 x_0}{dt^4} & \dfrac{d^4 y_0}{dt^4} & \dfrac{d^4 z_0}{dt^4} \\ \dfrac{dx_0}{dt} & \dfrac{dy_0}{dt} & \dfrac{dz_0}{dt} \\ \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} & \dfrac{d^2 y_0}{dt^2} & \dfrac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix},$$

et l'on écrit l'équation différentielle ci-dessus sous la forme

$$2T\frac{d\lambda}{dt} + T'\lambda + U\lambda^2 = 0,$$

puis on la transforme comme il suit :

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{T'}{2T^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\lambda} + \frac{U}{2T^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ou bien

$$-D_t\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{T}}\right) + \frac{U}{2T^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

et l'on en déduit, en intégrant,

$$\frac{1}{\lambda\sqrt{T}} = \int\frac{U\,dt}{2T^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{T}\int\frac{U\,dt}{T^{\frac{3}{2}}}}.$$

L'intégrale qui figure dans cette équation contient le paramètre v comme terme additionnel.

Les formules (1) deviennent

$$x = x_0 + 2\frac{\frac{d^2x_0}{dt^2}}{\sqrt{T}\int\frac{U\,dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

$$y = y_0 + 2\frac{\frac{d^2y_0}{dt^2}}{\sqrt{T}\int\frac{U\,dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

$$z = z_0 + 2\frac{\frac{d^2z_0}{dt^2}}{\sqrt{T}\int\frac{U\,dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

et le problème est ainsi résolu.