NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. D'ADHÉMAR

Étude élémentaire d'une série sur son cercle de convergence

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 303-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__303_0>

[D6cα]

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'UNE SÉRIE SUR SON CERCLE DE CONVERGENCE;

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

L'étude d'une série de puissances entières de la variable complexe, sur le cercle de convergence, supposé non nul ni infini, est un problème d'une grande difficulté.

Nous nous proposons, ici, de faire cette étude, d'une manière très simple, pour deux cas classiques; la méthode s'étendrait probablement à quelques autres cas.

1. *Étude de* L $(1-z)$, (L désigne le logarithme). — Nous établirons, très simplement, que la série converge en tous les points du cercle de convergence, sauf au point *un*.

Soit un contour, à l'intérieur duquel la fonction f_z est synectique, le bord étant compris, on a, d'après Cauchy,

$$2i\pi f(u) = \int_C \frac{f_z\,dz}{z-u},$$

u étant intérieur au contour C; on en déduit, de suite, le point *zéro* étant aussi intérieur au contour C:

$$2i\pi f_u = 2i\pi\left(f_0 + \frac{u}{1} f_0^{\bar{1}} + \frac{u^2}{\lfloor 2} f_0^{\bar{2}} + \ldots + \frac{u^p}{\lfloor p} f_0^{\bar{p}}\right) + \rho_p,$$

$$\rho_p = \int_C \frac{u^{p+1} f_z\,dz}{z^{p+1}(z-u)} \qquad (f_z^{\bar{p}} \text{ désigne la } \textit{dérivée} \text{ d'ordre } p).$$

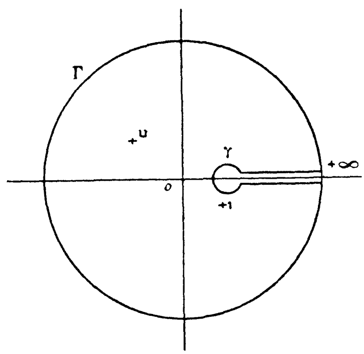
Étudions ce *reste*, avec le contour suivant:

Supposons la partie réelle de *u inférieure ou égale* à *un*, nous prenons pour contour :

1° Un cercle de centre O et de rayon R, que nous ferons croître indéfiniment plus tard ;

2° Un cercle de centre 1 et de rayon r, qui tendra vers *zéro* ;

3° Une coupure suivant l'axe réel de $+1$ à $+\infty$:



Le *reste* contient donc trois termes ; on voit immédiatement que les deux premiers tendent vers *zéro* avec r et $\frac{1}{R}$.

En effet, pour $|z| = R$, le module de l'intégrale ρ_p est de l'ordre de $\frac{LR}{R^{p+1}}$.

Ceci tend vers *zéro* avec $\frac{1}{R}$.

Pour $|z - 1| = r$, le module de l'intégrale ρ_p est de l'ordre de $r L r$, ce qui tend vers *zéro* avec r.

Il reste à étudier l'intégrale le long de la coupure.

Sur *un* bord, le logarithme est le logarithme ordinaire, réel, que nous représentons par $L_0(x-1)$; sur *l'autre* bord, le logarithme est $L_0(x-1) + 2i\pi$, si le petit cercle a été parcouru dans le sens *positif*.

Donc, en somme, ρ_p se réduit à :

$$2i\pi u^{p+1}\int_{+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p+1}(x-u)},$$

d'où

$$f_u = f_0 + \frac{u}{1}f_0^{\bar{1}} + \frac{u^2}{\lfloor 2}f_0^{\bar{2}} + \ldots + \frac{u^p}{\lfloor p}f_0^{\bar{p}} + \rho'_p,$$

$$\rho'_p = u^{p+1}\int_{+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p+1}(x-u)}.$$

On a, d'ailleurs, x étant sur la coupure

$$|x-u| \geqq |1-u|,$$

$$|\rho'_p| \leqq \left|\frac{u^{p+1}}{1-u}\right|\int_{+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p+1}}.$$

Nous avons enfin

$$L(1-u) = -\left(\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{u^p}{p}\right)+\rho'_p$$

avec l'inégalité

$$|\rho'_p| < \frac{1}{p}\left|\frac{u^{p+1}}{1-u}\right|.$$

Prenons, sur le cercle de convergence, le cercle de rayon un, un point u autre que le point $+1$.

On a

$$|u| = 1,$$

donc, le reste devient nul, si p devient infini. Mais si le point u, pris sur le cercle, tend vers le point un, il est clair que le reste, pour p infini, n'est pas nul.

C. Q. F. D.

2. *Étude de* $(1-z)^m$, (m est réel).

Le point critique est le même, nous avons donc exactement le même contour d'intégration.

D'ailleurs, tandis qu'une circulation autour du point un, dans le sens positif, augmentait le logarithme de

$2i\pi$, ici la même circulation multiplie la fonction par $e^{2i\pi m}$. Étudions le reste :

$$\int_C \frac{u^{p+1}}{z^{p+1}} \frac{(1-z)^m \, dz}{z-u}.$$

La discussion est un peu plus délicate.

Étudions d'abord l'intégrale sur le grand cercle : en prenant p assez grand, il est clair qu'elle devient nulle avec $\frac{1}{R}$.

Considérons le petit cercle : posons

$$|z-1| = r,$$

r étant très petit. Le module a une expression de la forme

$$\left|\frac{u^{p+1}}{1-u}\right| r^{m+1} \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Le point u étant différent du point un, ceci nous donne, lorsque r tend vers zéro :

pour $m+1 > 0$, zéro,

pour $m+1 = 0$, un nombre fini,

pour $m+1 < 0$, l'infini.

Considérons enfin l'intégrale suivant les deux bords de la coupure : nous avons un facteur $e^{2m\pi i} - 1$, nul pour m entier, puis une intégrale réelle de la forme :

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{(x-1)^m}{x^{p+1}} dx.$$

1° Supposons m positif, on a une expression de la forme

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p+1-m}} = \frac{1}{p-m},$$

p devenant *infini*, cela tend vers *zéro*.

2° Supposons

$$0 > m > -1.$$

Le point *un* est un point singulier pour la fonction sous le signe, mais l'intégrale reste déterminée et finie.

Prenons-la sous la forme

$$\int_{+1}^{+2} + \int_{+2}^{+\infty}$$

et soit $m = -q$; on aura, en posant $y = (x-1)^{1-q}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^q x^{p+1}} = \frac{1}{1-q} \int_0^1 \frac{dy}{\left(1+y^{\frac{1}{1-q}}\right)^{p+1}}.$$

Donc cette intégrale tend vers *zéro* avec $\frac{1}{p}$.

D'ailleurs nous avons, pour $x > 2$,

$$(x-1)^q > 1,$$

d'où

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^q x^{p+1}} < \int_2^\infty \frac{dx}{x^{p+1}} = \frac{1}{p}\,\frac{1}{2^p}.$$

Donc, enfin, notre intégrale tend vers *zéro* quand p devient *infini*.

3° Supposons

$$-1 \geqq m.$$

Alors l'intégrale, quel que soit p, est *infinie*.

En résumé, le long de la coupure, nous avons, pour $m > -1$, et en majorant le module, une expression de la forme

$$B_p \left| \frac{u^{p+1}}{1-u} \right|,$$

B_p tendant vers *zéro* pour p *infini*.

Au contraire, pour $m \leqq -1$, nous aurions un terme *infini*.

Le seul point du cercle de convergence, pour lequel cette méthode ne donne aucun résultat est le point *un*, à cause de la présence, au dénominateur, du facteur $|1 - u|$.

Mais, en ce point, nous avons à étudier une série *réelle;* l'étude est faite depuis longtemps par les critères classiques et on a ce résultat :

m positif, série réelle convergente au point *un*,
m négatif, série réelle divergente au point *un*.

Ce qui précède donne, d'ailleurs, immédiatement les résultats suivants :

$m > -1$, série convergente certainement en tout point du cercle de convergence (sauf, peut-être, au point *un*).

$m \leqq -1$, série divergente sur tout le cercle (sauf, peut-être, au point *un*).

Donc, en admettant les résultats relatifs à la série réelle, et en considérant seulement le cas où m est réel (le seul que l'on rencontre pratiquement), nous avons obtenu facilement le théorème connu :

$m > 0$, série convergente en *tous les points* du cercle de convergence.

$m \leqq -1$, série divergente en *tous les points* du cercle.

$0 > m > -1$, série convergente en *tous les points* du cercle de convergence, *sauf* au point *un*.