NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

# Sur quelques théorèmes de géométrie élémentaire

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 10 (1910), p. 271-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__271_0>

[K2c¹]

# SUR QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à l'École primaire supérieure d'Ernée (Mayenne).

## I. — DROITES ET POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE.

1° Rappelons le théorème bien connu relativement au quadrilatère complet :

*Les cercles décrits sur les diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont même axe radical.*

Proposons-nous d'en tirer quelques propriétés intéressantes du triangle.

Voici d'abord un théorème qui n'est autre que le précédent sous un énoncé un peu différent :

*On coupe les côtés d'un triangle* ABC *par une transversale quelconque, laquelle rencontre les côtés* BA, AC, CB *en* D, E, F. *Les cercles de diamètres* BE, CD *et* AF *ont même axe radical.*

Assujettissons la transversale à passer par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC. Nous obtenons les propriétés suivantes :

*Les circonférences de diamètres* BE, CD *et* AF *se coupent d'une part sur le cercle circonscrit* O, *d'autre part sur le cercle des neuf points du triangle* ABC, *en un point* K. *Leur axe radical passe par l'orthocentre* H *du triangle.*

*Si des points* D, E, *on abaisse les perpendiculaires* DD′ *et* EE′ *sur* CA *et* BA ; *si des points* D, F, E, F, *on abaisse des perpendiculaires sur* CA *et* CB, BA *et* CB, *les droites* E′D′, F′E″, D″F′ *se coupent au point* K.

*De plus, ces trois droites passent par les milieux des segments* AH, BH, CH.

*La droite qui joint les orthocentres des quatre triangles formés par les côtés du triangle et la transversale passe encore en* K.

On tire alors le cas particulier suivant :

*Quand la transversale est la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle, le point* K *devient le point de Feuerbach.*

Ainsi, on a cinq cercles qui passent au point de Feuerbach et cinq points en ligne droite.

2° Le théorème suivant est également connu :

*On coupe les côtés d'un triangle* ABC *par une transversale* DEF *et de* A, B, C, *on mène les perpendiculaires sur* DEF, A*a*, B*b*, C*c*. *Puis de a, b, c, on abaisse les perpendiculaires sur* BC, CA *et* AB. *Ces droites se coupent en un même point* K. *Pour une même transversale, ce point est celui du* 1°.

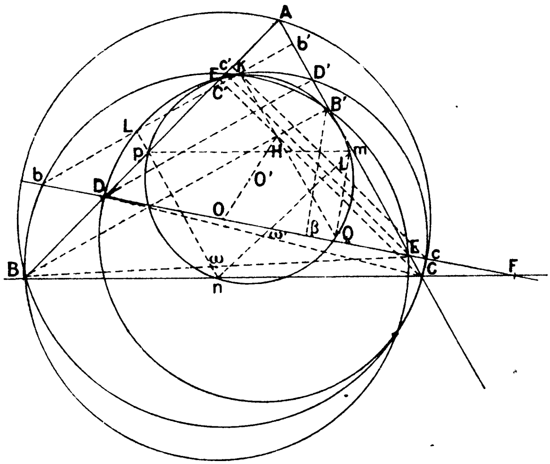
Le cas particulier suivant, moins connu peut-être, mérite l'attention :

*Quand la transversale passe en* O, *centre du cercle circonscrit, le point* K *décrit le cercle des neuf points dn triangle.*

Soient (*fig.* 1) ω et ω′ les cercles précédents du 1°

et les perpendiculaires $Bb$, $bb'$, $Cc$, $cc'$. D'après le 1°, les cercles $\omega$ et $\omega'$ se coupent sur $D'E'$.

Fig. 1.




Je dis que les perpendiculaires $bb'$, $cc'$, par exemple, passent en K.

En effet, prouvons que $Kb$ est perpendiculaire à CA, c'est-à-dire parallèle à $DD'$.

Or

$$\widehat{E'Kb} = \widehat{E'Eb} \text{ (même mesure)}$$

$$= \widehat{E'D'D} \text{ (dans le quadrilatère inscrit } DE'D'E\text{)}.$$

$bb'$ est donc perpendiculaire à CA

Un raisonnement analogue concerne les perpendiculaires $aa'$ et $cc'$.

Joignons $KB'$ et abaissons $B'\beta$ perpendiculaire sur DEF, $B'$ étant le pied de la hauteur $BB'$.

Le quadrilatère $BbKB'$ étant inscriptible, est un trapèze isoscèle et

$$KB' = Bb; \qquad KB = bB':$$
$$\widehat{KB'B} = \widehat{bBB'} = \widehat{BB\beta}.$$

D'où les propriétés remarquables suivantes :

*Les distances du point* K *aux pieds des hauteurs du triangle égalent respectivement les distances des sommets à la transversale.*

*Les distances de* K *aux sommets du triangle sont égales aux distances respectives des pieds des hauteurs aux projections des sommets sur la transversale.*

Enfin *la droite* $B'K$, *par exemple, qui joint le pied de la hauteur* $BB'$ *à* K, *est symétrique de la perpendiculaire* $B'\beta$ *sur la transversale*, ou inversement *la symétrique de* $B'\beta$ *par rapport à la hauteur* $BB'$ *passe par* K.

On remarque aussi que le quadrilatère $DC'KC$ étant inscriptible, DK est perpendiculaire sur CK; de même $\widecheck{CDc} = \widecheck{CKc}$; etc.

Traçons le cercle d'Euler du triangle ABC et menons KQ parallèle à CA; le triangle formé par les milieux des côtés de ABC est *mnp*.

Comme $B'K = mQ$, $mK$ et $mQ$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{pmn}$.

Alors $mQ$ *donne la direction des diamètres de la parabole tangente aux côtés du triangle mnp et qui a* K *pour foyer. Ces diamètres sont donc perpendiculaires à* DEF.

*Comme le centre* O *du cercle circonscrit à* ABC *est* *l'orthocentre de mnp, la transversale est la directrice de la parabole.*

Dans le cas plus particulier encore où la transversale est la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit, *le point* K *devient le point de Feuerbach* $\varphi_1$.

Alors *les distances du point de Feuerbach aux pieds des hauteurs d'un triangle égalent respectivement les perpendiculaires abaissées des sommets sur la droite* OI.

*Les distances du point de Feuerbach aux sommets du triangle sont égales respectivement aux distances des pieds des hauteurs aux projections des sommets sur la droite* OI.

*La symétrique de* $B'\varphi_1$, *par exemple, par rapport à la hauteur* BB', *est perpendiculaire à* OI, ou inversement *la symétrique de la perpendiculaire* $B'\beta$ *à* OI *par rapport à la hauteur* BB', *passe au point de Feuerbach.*

Ce cas particulier a été donné par Mannheim, *Nouvelles Annales*, janvier 1907.

De plus, *le point de Feuerbach et la droite* OI *sont le foyer et la directrice d'une parabole tangente aux côtés du triangle mnp.*

Ce cas particulier a été démontré en 1906 dans les *Nouvelles Annales* (p. 510) par un article de M. Bouvaist.

Revenons au cas général de tout à l'heure.

Les centres des cercles $\omega$ et $\omega'$ sont sur les côtés *np* et *mn*. Les points d'intersection de K*b*, K*c* avec ces côtés déterminent la droite de Simson LL' du point K par rapport au triangle *mnp*.

D'ailleurs L et L' sont milieux de K*b* et K*c*.

Donc *la droite de Simson du point* K *par rapport au triangle mnp est parallèle à la transversale.*

M. Ch. Michel, professeur au Lycée Saint-Louis, a énoncé en 1904 (*Bulletin de Mathématiques élémentaires*) le cas particulier correspondant à la transversale OI :

*La droite de Simson du point de Feuerbach relative au triangle mnp, est parallèle à la droite* OI.

Enfin signalons encore les propriétés suivantes qui apparaissent d'elles-mêmes dans ce qui précède :

*Soient un point* K *sur une circonférence et un triangle inscrit mnp. On projette* K *sur les côtés mn et np, en* LL'. *La projection du troisième côté mp sur* LL' *est égale à* LL'.

*La droite qui joint le point de Feuerbach à l'orthocentre d'un triangle est la directrice de la parabole tangente aux côtés du triangle et à la droite* OI.

*Si le point de Feuerbach est sur une hauteur d'un triangle, la droite* OI *est parallèle à l'un des côtés, et réciproquement.*

## II. — Cercles remarquables du triangle.

Il existe quelques cercles du triangle, que nous n'avons pas encore eu l'occasion de rencontrer.

1° *Quand on décrit des pieds des hauteurs d'un triangle* ABC *comme centres, des cercles de même rayon, ils coupent les côtés du triangle formé en joignant les milieux des côtés de* ABC, *en six points concycliques.*

Soient ABC le triangle donné, MNP celui qui est formé en joignant les milieux des côtés du premier; des pieds des hauteurs D, E, F, décrivons des circonférences de rayon R′, lesquelles coupent les côtés de MNP en G, Q, K, L, R, S.

Les quatre points G, Q, K, L, par exemple, sont sur un cercle. En effet, ω étant le milieu de GQ,

$$\begin{aligned}\mathrm{GM.MQ} &= \overline{\mathrm{G}\omega}^2 - \overline{\mathrm{M}\omega}^2 = \overline{\mathrm{GD}}^2 - (\overline{\mathrm{D}\omega}^2 + \overline{\mathrm{M}\omega}^2)\\ &= \mathrm{R}'^2 - \overline{\mathrm{MD}}^2 = \mathrm{R}'^2 - \left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\mathrm{KM.ML} = \mathrm{R}'^2 - \overline{\mathrm{ME}}^2 = \mathrm{R}'^2 - \left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2.$$

C. Q. F. D.

Par un raisonnement analogue on établit que H, G, R, S sont sur le cercle précédent. Le centre de ce cercle est l'orthocentre H du triangle ABC.

Calculons son rayon ρ. On a successivement, en appelant R le rayon du cercle ABC,

$$\mathrm{R}'^2 - \frac{c^2}{4} = \mathrm{MG.MQ} = \rho^2 - \overline{\mathrm{MH}}^2;$$

or

$$2\overline{\mathrm{MH}}^2 + \frac{c^2}{2} = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{BH}}^2;$$

mais

$$c^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{BH}}^2 + 2\,\mathrm{EH.BH} = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{BH}}^2 + \mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2.$$

Alors finalement

$$\rho^2 = \mathrm{R}'^2 + 4\,\mathrm{R}^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

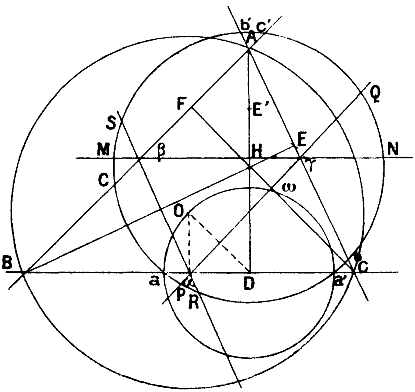
*Cas particulier.* — Le cas où R′ = R est particulièrement intéressant, nous le retrouverons tout à l'heure

$$\rho^2 = 5\,\mathrm{R}^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

2° *Des pieds des hauteurs d'un triangle* ABC *comme centres, on décrit des circonférences passant par le centre du cercle circonscrit; elles coupent les côtés du triangle en six points concycliques.*

Soient ABC le triangle donné (*fig.* 2) et $a, a', b, b', c, c'$

Fig. 2.




les six points obtenus avec les circonférences D, E, F, passant en O.

Je dis que ces six points sont sur une circonférence de centre H. En effet, le triangle rectangle HD$a$ donne

$$\overline{Ha}^2 = \overline{HD}^2 + \overline{Da}^2 = \overline{HD}^2 + \overline{O\alpha}^2 + \overline{\alpha D}^2;$$

or

$$O\alpha = \frac{AH}{2} = HE';$$

d'où

$$\overline{Ha}^2 = \overline{HD}^2 + \overline{HE'}^2 + \overline{\alpha D}^2,$$

en appelant E' le milieu de AH.

Ajoutons et retranchons AH.AD au deuxième membre de l'égalité précédente et remarquons que $\alpha$E' est le diamètre du cercle des neuf points de ABC, il vient finalement

$$\overline{Ha}^2 = R^2 - AH.HD.$$

On a de même

$$\overline{Hb}^2 = R^2 - BH.HE; \qquad \overline{Hc}^2 = R^2 - CH.HF,$$

c'est-à-dire

$$Ha = Hb = Hc,$$

puisque

$$AH.HD = BH.HE = CH.HF = \frac{R^2 - \overline{OH}^2}{2}.$$

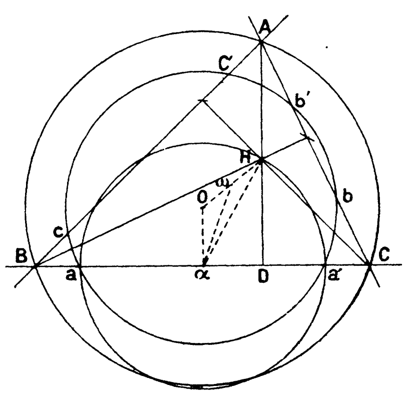
Les points $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$ sont sur un cercle H de rayon

$$\rho^2 = 5R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Ce cercle, prévu dans le cas particulier du 1°, peut d'ailleurs être identifié directement.

Des pieds des hauteurs D, E, F, décrivons des cercles

Fig. 3.




de rayon R, qui coupent les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ en six points concycliques.

*Ce cercle contient aussi les six points $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$ et l'on obtient ainsi douze points du triangle concycliques.*

En effet, il suffit de prouver par exemple que

$$P\alpha . \alpha Q = a\alpha . \alpha a'.$$

Soit $\omega$ le point où CF coupe $\alpha\gamma$.

On a successivement

$$\begin{aligned} P\alpha.\alpha Q &= \overline{P\omega}^2 - \overline{\alpha\omega}^2 = \overline{PF}^2 - \left(\overline{F\omega}^2 + \overline{\alpha\omega}^2\right) \\ &= \overline{PF}^2 - \overline{F\alpha}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{\alpha C}^2 \\ &= \quad \overline{O\alpha}^2 \quad = a\alpha.\alpha a'. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

*Remarque.* — Appelons $\varphi$ le point de Feuerbach relatif au triangle ABC, dont le centre du cercle circonscrit est O, l'orthocentre H et le centre du cercle des neuf points $\omega$.

On a alors

$$\overline{\varphi O}^2 + \overline{\varphi H}^2 = 2\overline{\varphi\omega}^2 + \frac{\overline{OH}^2}{2};$$

d'où l'on tire

$$\overline{\varphi O}^2 + \overline{\varphi H}^2 = 5R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Le rayon précédent $\rho$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés $\varphi O$ et $\varphi H$. Si sur $\varphi H$ on élève une perpendiculaire $\varphi K = \varphi K^2 = \varphi O$, les points K et K' sont sur le cercle H précédent.

Finalement *le cercle* H *de rayon* $\rho$ *contient quatorze points remarquables du triangle.*

3° *Des milieux des côtés d'un triangle* ABC *comme centres, on décrit des circonférences passant par l'orthocentre. Elles coupent les côtés du triangle en six points concycliques.*

Soient le triangle ABC et les six points $a, a', b, b', c, c'$. Je dis qu'ils sont sur un cercle.

Dans le triangle rectangle $\mathrm{O}a\alpha$ (*fig.* 3), on a

$$\overline{\mathrm{O}a}^2 = \overline{\mathrm{O}\alpha}^2 + \overline{a\alpha}^2 = \overline{\mathrm{O}\alpha}^2 + \overline{\alpha\mathrm{H}}^2 = 2\overline{\alpha\omega}^2 + \frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{2}$$
$$= \frac{\mathrm{R}^2 + \overline{\mathrm{OH}}^2}{2} = \text{const.},$$

R étant le rayon du cercle O et $\omega$ le centre du cercle des neuf points.

Pour la même raison

$$\overline{\mathrm{O}b}^2 = \overline{\mathrm{O}c}^2 = \overline{\mathrm{O}a}^2 = 5\mathrm{R}^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Le cercle O obtenu est égal au cercle H de rayon $\rho$.

*Remarque.* — D'après la remarque précédente, si l'on élève une perpendiculaire

$$\varphi\mathrm{K} = \varphi\mathrm{K}' = \varphi\mathrm{H}$$

sur $\varphi\mathrm{O}$, K et K' sont sur le cercle O.

Et *ce cercle* O *contient huit points remarquables du triangle.*