

CH. HALPHEN

Étude sur les champs de forces

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 256-270

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__256_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[R5c]

ÉTUDE SUR LES CHAMPS DE FORCES;

PAR M. CH. HALPHEN.

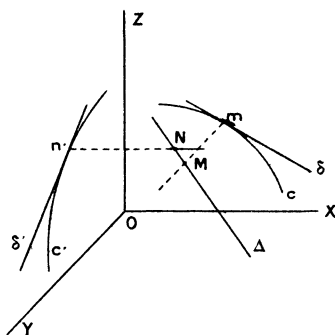
Je me propose ici d'étendre au cas des champs de forces à trois dimensions la méthode des enveloppes et une propriété signalées dans une précédente Note ⁽²⁾.

(¹) FRÉCHET, *Une définition fonctionnelle des polynomes* (*Nouvelles Annales*, 4^e série, t. IX, avril 1909, p. 1-17).

(²) Voir *Note sur les champs de forces plans*. numéro de mai 1910.

I.

1. La condition pour qu'une droite variable de l'espace, à un paramètre, admette une enveloppe, peut être mise sous une forme géométrique des plus simples. Si une telle droite Δ est tangente dans toutes ses positions à une courbe gauche Γ , ses projections sur deux plans quelconques ont évidemment des enveloppes, projections de Γ sur ces plans. Réciproquement, soient (voir *fig.*) δ et δ' les projections de la droite mobile Δ sur les plans xOz et yOz , δ et δ' ayant des enveloppes C , C' qu'elles touchent en m et n' . La droite Δ est tangente au cylindre ayant pour base la courbe C et des génératrices parallèles à Oy , en M ; et au cylindre



ayant pour base la courbe C' et des génératrices parallèles à Ox , en N . Si elle est tangente à une courbe gauche, ce ne peut être qu'à la courbe d'intersection de ces cylindres qui seule a C et C' pour projections sur les plans xOz , yOz ; il faut et suffit pour cela que M et N soient confondus, ce qui n'arrive pas en général. Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour

que Δ ait une enveloppe, est que M et N soient confondus, c'est-à-dire que m et n' aient la même cote z (1).

2. Equations différentielles des lignes de force.

— Par tout point de l'espace, ou d'une région limitée de l'espace, $M(x, y, z)$, faisons passer une droite dirigée Δ , ligne d'action d'une force agissant en ce point, dont les cosinus directeurs α, β, γ , soient fonctions des coordonnées du point. Les équations de cette droite variable sont

$$(1) \quad \frac{X-x}{\alpha} = \frac{Y-y}{\beta} = \frac{Z-z}{\gamma}.$$

Nous allons grouper ces droites Δ qui dépendent de trois paramètres x, y, z , de telle sorte que chaque groupe admette une enveloppe. Posons à cet effet

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x)$$

et remplaçons y et z par ces valeurs dans les équations

(1) Soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

les équations de la droite Δ , où a, b, p, q sont fonctions d'un paramètre t . Prises séparément, elles représentent, la première δ et la deuxième δ' , dans les plans des xz et des yz ; ces droites ont des enveloppes puisqu'elles ne dépendent que d'un paramètre, et les z des points de contact m et n' s'obtiennent en les différentiant par rapport à t ,

$$a'z + p' = 0 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{p'}{a'} \quad (\text{point } m),$$

$$b'z + q' = 0 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{q'}{b'} \quad (\text{point } n').$$

La droite Δ a donc une enveloppe si

$$\frac{a'}{b'} = \frac{p'}{q'} \quad \text{ou} \quad a'q' - b'p' = 0.$$

C'est la condition classique.

tions (1), la substitution étant faite aussi dans α , β , γ ; elles ne dépendent plus alors que d'un seul paramètre x . Les projections de Δ sur xOz et yOz ont pour équations

$$(\delta) \quad X - x = \frac{\alpha}{\gamma}(Z - z),$$

$$(\delta') \quad Y - f(x) = \frac{\beta}{\gamma}(Z - z),$$

où $z = \varphi(x)$. Les Z des points de contact de δ et δ' avec leurs enveloppes s'obtiennent en différentiant leurs équations par rapport à x , ce qui donne

$$-1 = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)'(Z - z) - \frac{\alpha}{\gamma}\varphi'(x),$$

$$-f'(x) = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)'(Z - z) - \frac{\beta}{\gamma}\varphi'(x),$$

et il faut, pour que Δ ait une enveloppe, que ces deux équations donnent pour Z la même valeur. Mais si cette enveloppe est une ligne de force, son point de contact avec Δ sera précisément le point M où est appliquée la force, c'est-à-dire $Z = z$. Pour que les équations précédentes donnent bien toutes deux $Z = z$, il faut et suffit que les fonctions φ et f satisfassent aux conditions

$$1 = \frac{\alpha}{\gamma}\varphi'(x), \quad f'(x) = \frac{\beta}{\gamma}\varphi'(x)$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{f'(x)}{\beta} = \frac{\varphi'(x)}{\gamma}.$$

Ces équations déterminent les fonctions f et φ . Comme

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad \varphi'(x) = \frac{dz}{dx},$$

on peut les écrire, α , β , γ , étant de nouveau exprimés

en fonction de x, y, z ,

$$(2) \quad \frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$

Ce sont deux équations différentielles du premier ordre; l'intégrale générale contient donc deux constantes: c'est-à-dire que les lignes de force qu'elle représente dépendent de deux paramètres arbitraires, ou forment une *congruence*.

3. *Equation des surfaces de niveau.* — Ce sont les surfaces trajectoires orthogonales des lignes de force. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la ligne d'action de la force appliquée au point M (x, y, z); le plan tangent à la surface de niveau passant par ce point aura pour équation

$$(3) \quad \alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0.$$

Ces plans dépendent de trois paramètres x, y, z ; groupons-les de façon qu'ils ne dépendent plus que de deux paramètres x, y , en posant

$$z = \psi(x, y).$$

On aura alors leur enveloppe (si elle existe), en joignant à l'équation (3) celles qui en proviennent en la différenciant par rapport à x et à y :

$$(4) \quad \alpha'_x(X - x) + \beta'_x(Y - y) + \gamma'_x(Z - z) - (\alpha + \gamma\psi'_x) = 0,$$

$$(5) \quad \alpha'_y(X - x) + \beta'_y(Y - y) + \gamma'_y(Z - z) - (\beta + \gamma\psi'_y) = 0;$$

en résolvant les trois équations linéaires (3), (4), (5), en $X - x, Y - y, Z - z$, on aura les coordonnées X, Y, Z , du point de contact du plan et de son enveloppe. Mais si nous voulons que cette enveloppe soit une surface de niveau, il faut que son point de contact avec le

plan soit précisément le point $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, où est appliquée la force; les équations (4) et (5) montrent qu'il est pour cela nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\alpha + \gamma\psi'_x = 0, \quad \beta + \gamma\psi'_y = 0,$$

équations qui déterminent la fonction inconnue ψ . On peut les écrire

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Ce sont deux équations aux dérivées partielles simultanées; et comme

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

on peut les remplacer par l'unique équation aux différentielles totales

$$(7) \quad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0.$$

Mais on sait que le problème ainsi posé n'est pas toujours possible. En effet, pour que les équations (6) soient compatibles, il faut que $-\frac{\alpha}{\gamma}$ et $-\frac{\beta}{\gamma}$ soient les dérivées partielles d'une même fonction; comme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right),$$

on doit avoir *identiquement*

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)$$

ou, en développant,

$$(8) \quad x\gamma'_y - \gamma x'_y + \beta\alpha'_z - \alpha\beta'_z + \gamma\beta'_x - \beta\gamma'_x = 0.$$

Soit $F(x, y, z)$ la force en un point $M(x, y, z)$

de l'espace; ses projections sur les trois axes sont $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$. Si elle dérive d'un potentiel $U(x, y, z)$, c'est-à-dire si l'on a

$$F\alpha = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F\beta = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F\gamma = \frac{\partial U}{\partial z},$$

la condition (8) est identiquement vérifiée; d'ailleurs l'équation (7) s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0,$$

et s'intègre immédiatement :

$$U(x, y, z) = \text{const.};$$

il y a donc des surfaces de niveau, ou équipotentiellles. Réciproquement, supposons la condition (8) identiquement satisfaite; l'équation (7) admet alors une intégrale générale dépendant d'une constante qu'on peut mettre sous la forme

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

Pour un déplacement élémentaire dx , dy , dz , sur une surface de niveau, on a alors

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0,$$

d'où

$$(9) \quad \frac{\alpha}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\beta}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{1}{F(x, y, z)}$$

en appelant $\frac{1}{F(x, y, z)}$ la valeur commune de ces rapports. D'où

$$F\alpha = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F\beta = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F\gamma = \frac{\partial U}{\partial z};$$

et cela montre que l'on peut placer en tout point du champ une force $F(x, y, z)$ ayant pour ligne d'action la droite donnée en ce point, de cosinus directeurs α , β , γ , et dérivant du potentiel U . Il est clair d'ailleurs que F n'est pas arbitraire, car on déduit de (9)

$$F^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2.$$

Mais on peut évidemment appliquer en chaque point, sur la même droite, une force différente de F et ne dérivant pas d'un potentiel, sans changer ni les lignes de force, ni les surfaces de niveau; le champ créé par cette nouvelle force aura donc une infinité de surfaces de niveau, *bien que la force ne dérive pas d'un potentiel.*

Ce qui précède nous permet d'énoncer ce théorème :

Il existe une infinité de surfaces de niveau (c'est-à-dire, la condition (8) est identiquement satisfaite) lorsque la force qui crée le champ dérive d'un potentiel, ou peut être partout remplacée par une force de même direction dérivant d'un potentiel. Dans le cas contraire, il n'y a pas de surfaces de niveau, à part quelques surfaces qui, éventuellement, satisfaisaient à la fois aux équations (7) et (8).

C'est l'interprétation mécanique de la condition d'intégrabilité (8).

Voici un exemple très simple. Le champ créé par une force passant par un point fixe a toujours une infinité de surfaces de niveau : ce sont des sphères concentriques. Nous pouvons prendre pour loi de cette force une fonction des coordonnées du point d'application aussi compliquée que nous voulons; il n'y a alors aucune raison pour que les trois composantes rectangulaires de la force soient les dérivées partielles d'une

même fonction ; il n'y aura pas de potentiel. Mais, en tout point du champ, on peut à cette force en substituer une autre, de même direction, c'est-à-dire passant par le point fixe, et proportionnelle à la distance du point considéré au point fixe : elle dérive du potentiel $x^2 + y^2 + z^2$.

Si l'on se donne d'abord les surfaces de niveau

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

d'un champ, les équations différentielles des lignes de force, c'est-à-dire des trajectoires orthogonales de ces surfaces, sont

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}};$$

cela résulte immédiatement de ce qu'on a déjà vu.

II.

1. THÉORÈME PRÉLIMINAIRE. Voici d'abord un théorème qui sera utile :

Etant donnés une fonction de plusieurs variables $u(x, y, z)$ et un paramètre k , une identité telle que

$$(1) \quad u(kx, ky, kz) \equiv \varphi(k) u(x, y, z),$$

quels que soient k, x, y, z , ne peut avoir lieu que si la fonction $u(x, y, z)$ est homogène; la fonction $\varphi(k)$ se réduit alors à une puissance de k , dont l'exposant est le degré d'homogénéité de u .

D'abord, il est clair que la fonction $\varphi(k)$ ne peut être arbitraire. Faisons en effet $x = y = z = 1$, dans l'identité (1); on a la condition nécessaire

$$u(k, k, k) \equiv \varphi(k) u(1, 1, 1),$$

et l'identité (1) s'écrit par conséquent

$$(2) \quad \frac{u(kx, ky, kz)}{u(x, y, z)} \equiv \frac{u(k, k, k)}{u(1, 1, 1)},$$

quels que soient x, y, z, k . Donc le quotient $\frac{u(kx, ky, kz)}{u(x, y, z)}$ ne contient ni x , ni y , ni z ; c'est seulement une fonction de k . Différentions l'identité (2) par rapport à k :

$$\frac{x u'_{kx}(kx, ky, kz) + y u'_{ky}(kx, ky, kz) + z u'_{kz}(kx, ky, kz)}{u(x, y, z)} \\ \equiv \frac{u'_k(k, k, k)}{u(1, 1, 1)}$$

en désignant pour abréger, par $u'_k(k, k, k)$ l'expression

$$u'_x(k, k, k) + u'_y(k, k, k) + u'_z(k, k, k).$$

Cette identité doit encore avoir lieu pour toutes les valeurs de x, y, z , et k ; en particulier pour $k=1$.

Mais pour $k=1$, $\frac{u'_k(k, k, k)}{u(1, 1, 1)}$ devient une *quantité numérique*, soit m . L'identité se réduit alors à

$$x u'_x(x, y, z) + y u'_y(x, y, z) + z u'_z(x, y, z) \equiv m u(x, y, z),$$

quels que soient x, y, z . Il est donc *nécessaire* que la fonction $u(x, y, z)$ soit homogène et d'un certain degré m .

Quelle est alors la forme qu'a nécessairement $\varphi(k)$? Par définition, on a

$$u(kx, ky, kz) \equiv k^m u(x, y, z),$$

donc

$$u(k, k, k) \equiv k^m u(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad \varphi(k) \equiv k^m.$$

L'identité (1) devient alors l'identité qui définit les fonctions homogènes

$$(3) \quad u(kx, ky, kz) \equiv k^m u(x, y, z).$$

Remarque. — On trouve ainsi pour degré d'homogénéité de u

$$m = \left[\frac{u'_k(k, k, k)}{u(1, 1, 1)} \right]_{k=1}$$

ou

$$m = \frac{u'_x(1, 1, 1) + u'_y(1, 1, 1) + u'_z(1, 1, 1)}{u(1, 1, 1)}.$$

L'identité d'Euler

$$x u'_x(x, y, z) + y u'_y(x, y, z) + z u'_z(x, y, z) \equiv m u(x, y, z)$$

donne bien le même résultat, en faisant

$$x = y = z = 1.$$

Voici une application de ce théorème qui sera aussi utile :

Si

$$u(x, y, z) = \lambda$$

est l'équation d'une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine, la fonction $u(x, y, z)$ est homogène.

Soit a une valeur particulière du paramètre λ , et S la surface

$$u(x, y, z) = a.$$

Toute surface homothétique a pour équation

$$u(kx, ky, kz) = a;$$

par hypothèse, on peut la remplacer par l'équation

$$u(x, y, z) = b.$$

La valeur b du paramètre dépend certainement de k ; posons

$$b = \frac{a}{\varphi(k)}.$$

Les équations

$$u(kx, ky, kz) = a, \quad u(x, y, z) = \frac{a}{\varphi(k)}$$

sont identiques; on a donc

$$u(kx, ky, kz) \equiv \varphi(k) u(x, y, z),$$

par suite, la fonction $u(x, y, z)$ est homogène. Il est évident que si, réciproquement, la fonction u est homogène, l'équation

$$u(x, y, z) = \lambda,$$

représente une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine.

2. Lignes et surfaces homothétiques. — Le point (x, y, z) décrit une ligne de force si l'on a

$$(4) \quad \frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)},$$

et la ligne décrite par le point kx, ky, kz , sera aussi une ligne de force si ces équations ne changent pas quand on y substitue kx, ky, kz , à x, y, z . En faisant cette substitution, les numérateurs deviennent kdx, kdy, kdz ; ils sont simplement multipliés par k . Si les dénominateurs sont simplement multipliés par une même fonction de k , les équations (4) ne changeront pas; mais d'après le théorème précédent, il faut et suffit pour cela que α, β, γ , soient des fonctions homogènes de même degré. Nous plaçant dans ce cas, considérons une courbe particulière (C), dépendant d'un seul paramètre arbitraire h ,

$$u(x, y, z) = h, \quad v(x, y, z) = h,$$

satisfaisant à (4); toutes les courbes homothétiques à

celle-là

$$u(kx, ky, kz) = h, \quad v(kx, ky, kz) = h$$

satisfont aussi à (4) : or ces courbes dépendent de deux paramètres arbitraires et complètement indépendants, h et k ; elles forment donc l'intégrale générale de (4), c'est-à-dire la congruence des lignes de force. Mais la courbe (C) engendre une surface (S) puisqu'elle ne dépend que d'un paramètre; pour chaque valeur de k , les courbes homothétiques à (C) engendrent des surfaces homothétiques de S par rapport à l'origine. Donc toutes les lignes de force peuvent être assemblées de façon à former une famille de surfaces homothétiques entre elles par rapport à l'origine. Il est presque évident d'ailleurs que ce groupement peut être fait d'une infinité de manières différentes; car soit

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b$$

l'intégrale générale de (4); il suffit d'établir une relation quelconque entre b et a pour obtenir une courbe à un seul paramètre satisfaisant aux équations (4). Nous appellerons pour abrégé *congruence homothétique* une telle congruence.

Prenons l'équation des surfaces de niveau

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0.$$

Pour qu'elle ne change pas quand x, y, z , deviennent kx, ky, kz , il faut et suffit que α, β, γ , soient homogènes et de même degré. Dans ce cas, les surfaces de niveau sont homothétiques par rapport à l'origine. Donc : *Si les lignes de force d'un champ forment une congruence homothétique par rapport à un point, les surfaces de niveau, lorsqu'elles existent, sont homothétiques par rapport au même point.*

(269)

Réciproquement, soit $U(x, y, z)$ une fonction homogène; l'équation

$$U(x, y, z) = \lambda$$

représente une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine. Les dérivés $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, sont aussi homogènes, et les trajectoires orthogonales à cette famille de surfaces étant définies par les équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}},$$

les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces homothétiques par rapport à un point forment une congruence homothétique par rapport au même point. Par conséquent, on peut assembler ces trajectoires orthogonales d'une infinité de manières en surfaces, qui toutes sont orthogonales aux surfaces de la famille donnée, et homothétiques par rapport au même point que celles-ci.

3. *Exemple.* Donnons nous les cosinus directeurs

$$\alpha = \frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2}},$$
$$\beta = \frac{y}{2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2}},$$
$$\gamma = \frac{z}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2}},$$

qui sont des fonctions homogènes de degré zéro en x ,

y, z . Les surfaces de niveau ont pour équation

$$\frac{x}{2} dx + \frac{y}{2} dy + z dz = 0.$$

La condition d'intégrabilité est vérifiée, et cette équation s'intègre immédiatement :

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = \lambda^2.$$

Ce sont des ellipsoïdes de révolution autour de Oz , homothétiques par rapport à l'origine. Les lignes de force ont pour équations :

$$\frac{z dx}{x} = \frac{z dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

On en tire facilement

$$\frac{y^2}{x^2} = a, \quad \frac{z}{x^2} = b.$$

Prenons par exemple $b = a$; nous isolons ainsi dans la congruence une courbe à un paramètre qui engendre le cylindre parabolique $y^2 = z$; tous les cylindres paraboliques homothétiques : $(ky)^2 = kz$ sont orthogonaux aux ellipsoïdes de niveau (il est facile de le vérifier directement).

Il en est de même des cylindres paraboliques homothétiques $(kx)^2 = kz$.

Si l'on pose $b = 1 + a$, on trouve des surfaces homothétiques au parabolôïde de révolution autour de Oz : $z = x^2 + y^2$; $b = 1 - a$, des parabolôïdes hyperboliques homothétiques à $z = x^2 - y^2$; etc.

Toutes ces surfaces sont orthogonales aux ellipsoïdes de niveau.