Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Halphen

Note sur les champs de forces plans

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 227-233

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__227_1>

[R5c]

NOTE SUR LES CHAMPS DE FORCES PLANS;

PAR M. CH. HALPHEN.

1. Par tout point d'une région, limitée ou non, d'un plan, où l'on a pris deux axes rectangulaires, faisons passer une droite, ligne d'action d'une force appliquée en ce point, dont le coefficient angulaire est fonction des coordonnées du point $f(x, y)$. On sait que la détermination des lignes de force revient à l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Cette équation peut se déduire très aisément de la notion d'enveloppe. Soit

$$Y - y = f(x, y)(X - x) \tag{2}$$

l'équation de la droite D passant au point $M(x, y)$.

Cette droite n'a pas d'enveloppe puisqu'elle dépend de deux paramètres, x et y. Mais on peut *associer* les droites telles que D de façon que chaque groupe de ces droites ait une enveloppe. Posons par exemple

$$y = \varphi(x),$$

φ étant une fonction arbitraire; l'équation (2) ne dépend plus alors que *d'un seul* paramètre, x, et la droite D a une enveloppe. On obtient l'abscisse X du point de contact en différentiant l'équation (2) par rapport au paramètre x

$$(3) \qquad -\varphi'(x) = (X - x)[f'_x(x, \varphi) + f'_\varphi(x, \varphi)\varphi'_x] - f(x, \varphi).$$

Pour que cette enveloppe soit une ligne de force, il faut que son point de contact avec D soit précisément le point M où est appliquée la force, c'est-à-dire que $X = x$, l'équation (3) devient alors simplement

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi)$$

qui détermine la fonction φ; elle n'est autre que l'équation (1).

On peut procéder de la même façon pour les lignes de niveau, dont l'équation différentielle est

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

II. Si le coefficient angulaire de la force qui agit en un point $M(x, y)$ ne dépend que du rapport $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire si les forces agissant en des points en ligne droite avec l'origine sont parallèles, l'équation (1) devient homogène

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

et par conséquent, les lignes de force sont des courbes homothétiques par rapport à l'origine. Mais l'équation (4) des lignes de niveau devient aussi homogène

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

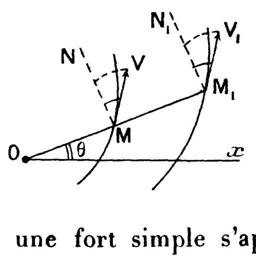
Donc on a ce théorème :

Les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes homothétiques par rapport à un point O *sont aussi homothétiques par rapport au même point.*

Il est facile de démontrer géométriquement ce théorème. Je rappelle que les tangentes en des points homologues de deux courbes homothétiques par rapport à un point O sont parallèles. *Réciproquement, deux courbes et un point* O *étant donnés, si les tangentes en* TOUS *les couples de points* M, M_1 ; M', M'_1 ; ..., *pris sur les deux courbes en ligne droite avec* O, *sont parallèles, ces courbes sont homothétiques par rapport au point* O.

Cette réciproque est intuitive si l'on considère une courbe comme un polygone de côtés extrêmement petits; mais une telle *démonstration* n'est guère rigou-

Fig. 1.



reuse. En voici une fort simple s'appuyant sur des résultats élémentaires de Cinématique. Soient (*fig.* 1)

M, M_1 deux points homologues; supposons que la droite OMM_1 tourne autour de O, chacun des points M, M_1 décrit alors une des courbes données. Posons

$$r = OM, \qquad kr = OM_1.$$

Les vitesses des points M, M_1 étant constamment parallèles, d'après l'hypothèse, MN et M_1N_1 étant perpendiculaires à OMM_1, dans le même sens, on devra avoir

$$\operatorname{tang}\widehat{NMV} = \operatorname{tang}\widehat{N_1M_1V_1}$$

ou

$$\frac{\dfrac{dr}{dt}}{r\dfrac{d\theta}{dt}} = \frac{\dfrac{d(kr)}{dt}}{kr\dfrac{d\theta}{dt}}$$

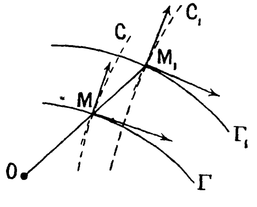
ou encore

$$k\frac{dr}{dt} = \frac{d(kr)}{dt},$$

ce qui ne peut avoir lieu que si k est une constante. Les courbes décrites par M et M_1 sont donc homothétiques.

Cela posé, soit (C) une famille de courbes homothétiques par rapport à un point O; considérons deux quelconques de leurs trajectoires orthogonales, Γ, Γ_1 (*fig.* 2), et soit OMM_1 un rayon quelconque issu de O.

Fig. 2.



Par M et M_1 passent deux courbes C et C_1 de la famille donnée, et leurs tangentes en ces points sont parallèles;

il est de même des tangentes à Γ, Γ_1 qui sont perpendiculaires aux premières, ce qui démontre le théorème.

On voit, en outre, qu'il n'est pas nécessaire que Γ, Γ_1, ... soient les trajectoires orthogonales de C, C_1, ... pour que le théorème soit vrai ; il suffit que ces courbes coupent les courbes (C) sous un angle constant. On a donc ce théorème plus général :

Les courbes coupant sous un angle constant une famille de courbes homothétiques par rapport à un point O, *sont aussi homothétiques par rapport au même point.*

Si (5) est l'équation différentielle des courbes (C), l'équation différentielle des courbes les coupant sous un angle constant, dont la tangente est K, est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{K} + f\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \mathrm{K} f\left(\frac{y}{x}\right)};$$

elle est bien, en effet, homogène.

Si, par exemple, le coefficient angulaire de la force agissant en un point $\mathrm{M}(x, y)$ est inversement proportionnel au coefficient angulaire de la droite OM, on peut poser

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{m}\frac{x}{y}.$$

Si l'on suppose $m > 0$, on trouve pour lignes de force des ellipses homothétiques à l'ellipse

$$my^2 + x^2 = 1,$$

pour lignes de niveau des courbes homothétiques à la courbe $y = x^m$.

III. On n'envisage généralement que les champs de forces constantes, où la force agissant en un point ne dépend que des coordonnées du point. Mais il peut arriver que cette force soit en outre fonction d'une autre variable, le *temps;* c'est ce qui se passe par exemple dans le champ magnétique tournant, sur le principe duquel est fondé le moteur asynchrone.

On peut *représenter* un tel *champ de forces variables.*

L'équation des lignes de force devient

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, t). \tag{6}$$

En donnant à t diverses valeurs constantes, et en intégrant chaque fois, on aura des équations des familles de lignes de force aux diverses époques; ces équations ne différant entre elles que par la valeur numérique de t. Il revient donc au même d'intégrer l'équation (6) en y considérant t comme une constante, quitte à donner ensuite, dans l'équation obtenue

$$F(x, y, t) = c,$$

diverses valeurs à t pour pouvoir construire les lignes de force aux diverses époques. Prenons un axe Ot perpendiculaire aux deux premiers Ox, Oy; l'équation

$$F(x, y, t) = c$$

représente alors une famille de surfaces. Si nous imaginons qu'on les coupe par un plan variable $t = \alpha$, se déplaçant d'un mouvement de translation à partir du plan xOy, les intersections traceront à chaque instant, sur ce plan, la figure des lignes de force du champ variable, en donnant ainsi une image de leur déformation continue. Il en est de même pour les lignes de niveau.

Dans le cas où ces surfaces seraient des espèces d'hélicoïdes, engendrés par deux familles de courbes orthogonales tracées dans le plan xOy, qui se déplacerait d'un mouvement hélicoïdal autour d'un axe perpendiculaire à lui-même, un observateur placé dans le plan variable $t = \alpha$ verra simplement les lignes de force et de niveau tourner, d'un mouvement uniforme si la translation du plan $t = \alpha$ l'est elle-même, autour d'un point fixe, sans se déformer; c'est là précisément l'image du champ tournant mentionné plus haut.

Mais il est clair qu'un tel mode de représentation est peu susceptible d'applications, puisque, pour étudier la forme même d'une surface, le procédé le plus pratique consiste précisément à en construire des sections planes, par exemple des courbes correspondant à diverses valeurs de t, ce qui est l'opération indiquée plus haut. Toutefois, il permet de se faire une idée assez nette de la continuité du phénomène.