NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

D. POMPEIU

Sur les intégrales curvilignes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 221-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__221_1>

[C21]

SUR LES INTÉGRALES CURVILIGNES;

PAR M. D. POMPEIU.

Considérons une intégrale curviligne

$$I = \int_{(P_0)}^{(P)} \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy$$

prise le long d'une certaine courbe C depuis le point P_0 jusqu'au point P.

Pour que cette intégrale dépende uniquement du point de départ P_0 et du point d'arrivée P, et non du chemin suivi, il faut et il suffit que l'expression

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$$

soit une différentielle totale exacte : c'est-à-dire qu'on ait

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \psi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y},$$

la fonction F (x, y, x_0, y_0) étant ainsi définie à une constante près.

1. Ordinairement on présente autrement ce théorème :

On admet que les fonctions φ et ψ possèdent des dérivées partielles du premier ordre et alors le théorème est démontré soit par la *méthode des variations* soit par la formule de Riemann qui transforme une intégrale curviligne en une intégrale double. On arrive ainsi à la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

qui n'est qu'une conséquence des relations (1).

Mais le premier énoncé doit être préféré, non seulement pour la simplicité avec laquelle le théorème qui nous occupe se démontre (en considérant l'intégrale curviligne comme fonction de sa limite supérieure) mais surtout parce que cet énoncé est plus général en ce sens qu'il ne suppose aucunement l'existence des dérivées pour φ et ψ. En effet, l'intégrale I peut ne pas dépendre du contour sans que φ et ψ admettent des dérivées partielles.

En voici un exemple :

Prenons une fonction de Weierstrass, c'est-à-dire une fonction $f(t)$ n'admettant pas de dérivée et supposons que $f(t)$ soit définie dans un certain intervalle (t_1, t_2). Soit $F(t)$ la fonction primitive de $f(t)$,

$$F'(t) = f(t).$$

Posons

$$t = xy.$$

Lorsque le point t varie dans l'intervalle (t_1, t_2) le point (x, y) décrit une certaine région du plan et, dans cette région, je prends un certain domaine D.

En tout point (x, y) du domaine D je définis une fonction $U(x, y)$ par l'égalité

$$U(x, y) = F(xy) = F(t).$$

On voit facilement que la fonction U admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \psi(x, y).$$

Mais, on le voit aussi facilement, φ et ψ n'admettent pas des dérivées partielles.

Pourtant l'intégrale curviligne

$$\int_C \varphi\, dx + \psi\, dy$$

est nulle pour tout contour fermé C tracé dans D.

2. Jusqu'à présent nous avons supposé φ et ψ continues. Mais ces fonctions n'étant assujetties qu'à la condition d'être les dérivées premières d'une fonction $U(x, y)$, elles peuvent être *discontinues* sans que la propriété de l'intégrale curviligne cesse de subsister. On peut même former des exemples dans lesquels φ et ψ

présentent des discontinuités dans tout domaine aussi petit qu'on veut et la propriété de l'intégrale curviligne subsiste.

En définitive ni la dérivabilité ni même la continuité des fonctions φ et ψ ne sont des conditions *nécessaires* pour que l'intégrale curviligne I soit indépendante du contour.

3. Mais ce résultat doit être rapproché, comme d'ailleurs tous les résultats sur les intégrales curvilignes, des théorèmes analogues sur les intégrales des fonctions d'une variable complexe.

On sait que, pour une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine D, simplement connexe, l'intégrale

$$\int f(z)\,dz$$

ne dépend pas du contour : elle est nulle pour tout contour fermé C tracé dans D.

La réciproque est vraie.

Si, dans un domaine simplement connexe D, une fonction $f(z)$ est continue et toutes les intégrales

$$\int_C f(z)\,dz$$

(C étant un contour fermé quelconque, tracé dans D) sont nulles, cette fonction $f(z)$ est holomorphe dans D.

C'est un théorème qu'on démontre facilement en considérant l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

comme une fonction de sa limite supérieure.

Ce théorème a été énoncé par Morera dans les *Ren-*

diconti del R. Instituto Lombardo, 2e série, t. XIX, 1886, p. 304-307. Ne sachant pas qu'il avait été donné par Morera ([1]) je l'ai démontré, à nouveau, dans ma Thèse : *Sur la continuité des fonctions d'une variable complexe* (*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. VII, 1905).

En séparant les parties réelles des parties imaginaires, le théorème de Morera peut s'exprimer de la façon suivante :

Si, dans un domaine D, *simplement connexe :*

1° *Les fonctions* $u(x, y)$ *et* $v(x, y)$ *sont continues ;*

2° *Les intégrales*

$$\int_C u\,dx - v\,dy, \qquad \int_C u\,dy + v\,dx,$$

nulles pour tout contour fermé C *tracé dans* D ; *les fonctions* u *et* v *admettent, dans* D, *des dérivées partielles continues liées par les relations*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

On serait tenté, d'après cet énoncé, de scinder le théorème de Morera en deux propositions distinctes dont l'ensemble soit précisément ce même théorème de Morera. B'est-à-dire :

Essayer de démontrer séparément que si u et v sont deux fonctions continues, dans un certain domaine D, simplement connexe, et si l'intégrale

$$\int_C u\,dy + v\,dx$$

([1]) C'est par une obligeante communication de M. le Prof. E. Landau que j'ai eu les renseignements bibliographiques complets sur le théorème de Morera.

est nulle quel que soit le contour fermé C tracé dans D ; les fonctions admettent des dérivées premières liées par la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

et un théorème analogue, avec l'intégrale curviligne

$$\int_C u\,dx - v\,dy.$$

Mais l'exemple du n° 1 montre que ces propositions ne sont pas exactes séparément. Elles ne sont vraies que prises ensemble (théorème de Morera).

Ce fait analytique est, soit dit en passant, encore un argument en faveur du symbolisme introduit par l'emploi des nombres complexes.

4. La formule de Riemann

$$(2)\qquad I = \frac{1}{2}\int_C M\,dy - N\,dx = \frac{1}{2}\int\int_{(C)} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy$$

prend une signification simple dans le cas où

$$M = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad N = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Dans ce cas le nombre I peut être appelé la *variation* de la fonction $F(x, y)$ dans le domaine (C), car on a

$$I = \int\int_{(C)} \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy,$$

et cette formule est tout à fait analogue à la formule simple

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt,$$

dans laquelle Φ est la *fonction primitive* de $\varphi(t)$.

Dans le cas où la dérivé F''_{xy} de F n'est pas intégrable, étant par exemple partout discontinue et non bornée, l'intégrale curviligne

$$\int_{C} \frac{\partial F}{\partial y}\, dy - \frac{\partial F}{\partial x}\, dx$$

peut servir comme *définition* du symbole

$$\int\int_{(C)} \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy,$$

lorsqu'il ne rentre ni dans la définition de Riemann ni dans celle, plus générale, de M. Lebesgue.