NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 21-24

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__21_1>

[H9d]

APPLICATION DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES AUX SURFACES DONT LES IMAGES SPHÉRIQUES DES LIGNES DE COURBURE SONT DES LOXODROMIES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Une surface (S) étant considérée, par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$, comme enveloppe du plan

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi,$$

l'équation différentielle des images sphériques (dans la représentation de Gauss) des lignes de courbure de (S) est

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi \, d\psi^2 + \frac{D'' - D\cos^2\varphi}{D'} d\varphi \, d\psi = 0; \tag{1}$$

en désignant par p, q, r, s, t les dérivées de la fonction ϖ de φ et de ψ, les déterminants D, D′, D″ de Gauss ont pour expressions, à un même facteur près,

$$D = \varpi + r,$$
$$D' = q \operatorname{tang}\varphi + s,$$
$$D'' = \varpi \cos^2\varphi + t - p \cos\varphi \sin\varphi.$$

L'équation (1) met en évidence deux classes de surfaces : celle des surfaces moulures $D' = 0$, pour lesquelles les lignes de courbure ont pour images sphériques les parallèles et les méridiens de la sphère, et celle des surfaces

$$D'' - D \cos^2 \varphi = 0,$$

surfaces qui sont les intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(2) \qquad t = \cos\varphi (p \sin\varphi + r \cos\varphi);$$

les images sphériques des lignes de courbure de ces dernières surfaces sont des loxodromies inclinées de 45° sur les méridiens

$$(3) \qquad \psi \pm \operatorname{Log}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \text{const.}$$

2. Soit τ l'argument des fonctions hyperboliques liées aux fonctions circulaires de l'arc φ par les relations de M. Laisant

$$\sin\varphi = \operatorname{th}\tau, \qquad \cos\varphi \operatorname{ch}\tau = 1, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{sh}\tau;$$

la transformation

$$x = \psi, \qquad \cos\varphi \operatorname{ch}\tau = 1, \qquad V = \varpi(1 + e^{-2\tau})$$

transforme l'équation (2) en l'équation des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies (3) *est donc ramenée à l'intégration de l'équation des télégraphistes.*

On peut prendre pour intégrale celle que donne

M. Poincaré :

$$\varpi = \cos\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Lambda_1 \cos(\tau\sqrt{\lambda^2 - 1}) + \Lambda_2 \frac{\sin(\tau\sqrt{\lambda^2-1})}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right] e^{i\lambda\psi}\, d\lambda,$$

Λ_1 et Λ_2 désignant deux fonctions arbitraires de λ.

3. Les intégrales particulières connues de l'équation des télégraphistes donnent les surfaces

$$\varpi = a\cos\varphi\cos\psi + b\cos\varphi\sin\psi + c\sin\varphi,$$
$$\varpi = \psi,$$
$$\varpi = \psi\sin\varphi,$$
$$\varpi = \psi^2 + \sin\varphi \,\mathrm{Log}\left[\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad \ldots,$$

et celle qu'on en déduit par combinaison linéaire ; à cette dernière solution, on pourra appliquer la méthode de la variation des constantes.

La première solution représente un point.

La solution $\varpi = \psi\sin\varphi$ représente l'*hélicoïde gauche à plan directeur*, seule surface minima dont les lignes de courbure ont les loxodromies (3) pour images sphériques.

La solution $\varpi = \psi$ est transformée de la précédente par la transformation de Bonnet, transformation qui laisse invariante l'équation (2) (sans donner d'ailleurs aucun résultat intéressant pour l'équation des télégraphistes) ; cette surface est donc une surface admettant le plan Oxy pour surface moyenne. Cette surface est aussi une *surface de M. Appell*, admettant le point O pour développée moyenne ; la projection de O sur chaque normale se fait donc au milieu du segment ayant pour extrémités les centres de courbure principaux, et cette projection est dans le plan Oxy : c'est à ce titre que je considérerai cette surface dans un prochain Mémoire sur les *Conséquences de deux théo-*

rèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques (¹).

Pour terminer, je ferai observer qu'on peut appliquer, aux surfaces dont les lignes de courbure ont des loxodromies pour images sphériques, la méthode exposée par M. Goursat dans ses *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*. M. Goursat traite, en particulier, le cas où les images sphériques sont des cercles et intègre l'équation correspondante

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

dans le cas actuel des loxodromies (3), l'équation est

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

elle ne s'intègre pas par la méthode de Monge; il est aisé de la transformer en des équations de Laplace à invariants égaux et constants, par exemple en l'équation

$$s = z.$$