NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Sur un trièdre mobile

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 193-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__193_0>

[O'5]

SUR UN TRIÈDRE MOBILE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$, une surface S étant définie comme enveloppe du plan

$$(1) \qquad x\cos\varphi\cos\psi + y\cos\varphi\sin\psi + z\sin\varphi = \varpi,$$

les coordonnées x, y, z du point de contact M de ce plan sont données par l'équation (1) et les équations

$$(2) \qquad -x\sin\varphi\cos\psi - y\sin\varphi\sin\psi + z\cos\varphi = \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} = p,$$

$$(3) \qquad -x\cos\varphi\sin\psi + y\cos\varphi\cos\psi = \frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = q;$$

ces trois équations donnent

$$x = \varpi\cos\varphi\cos\psi - p\sin\varphi\cos\psi - q\frac{\sin\psi}{\cos\varphi},$$

$$y = \varpi\cos\varphi\sin\psi - p\sin\varphi\sin\psi + q\frac{\cos\psi}{\cos\varphi},$$

$$(4) \qquad z = \varpi\sin\varphi + p\cos\varphi = \cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\varpi}{\cos\varphi}\right).$$

En remarquant que les plans (1), (2), (3) sont deux à deux orthogonaux, le *calcul des coordonnées du point* M *met en évidence un trièdre trirectangle mobile en même temps que ce point qui en est le sommet; l'une des arêtes est la normale en* M *à la surface* S.

Déterminons la nature du réseau orthogonal découpé sur la surface S par les plans (2) et (3). Les cosinus directeurs des arêtes Mx_1, intersection de (2) et (3), My_1, intersection de (3) et (1), et Mz_1, intersection de (1) et (2) sont donnés par le Tableau suivant :

	Ox.	Oy.	Oz.
Mx_1	$\cos\varphi\cos\psi$	$\cos\varphi\sin\psi$	$\sin\varphi$,
My_1	$-\sin\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi\sin\psi$	$\cos\varphi$,
Mz_1	$-\sin\psi$	$\cos\psi$	o.

L'arête Mz_1 est donc parallèle au plan Oxy que nous supposerons horizontal. Par suite, les *plans* (2) *et* (3) *découpent sur la surface* S *le réseau orthogonal des lignes de niveau et de plus grande pente.*

2. Le résultat relatif à l'orthogonalité des plans (1), (2) et (3) est une généralisation d'un théorème bien connu de Géométrie plane concernant les enveloppes de droites. Il peut être étendu à un nombre quelconque de dimensions. Considérons, en effet, un espace à $n+1$ dimensions : soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ les coordonnées ponctuelles et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les angles qui fixent la direction d'un plan

$$\begin{aligned}\Pi \equiv\ & x_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_n\\ &+x_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_{n-1}\sin\alpha_n\\ &+x_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_{n-2}\sin\alpha_{n-1}\\ &+x_4\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_{n-3}\sin\alpha_{n-2}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+x_n\cos\alpha_1\sin\alpha_2+x_{n+1}\sin\alpha_1-\varpi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0;\end{aligned}$$

le point de contact de ce plan avec son enveloppe est défini par les $n+1$ équations

$$\Pi=0,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_1}=0,\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_n}=0,$$

qui représentent $n+1$ plans deux à deux orthogonaux.

Comme application de ce théorème général, considérons une sphère quelconque de l'espace à trois dimensions; soit, selon les notations de M. Darboux,

$$S = 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \frac{\delta}{R}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$$
$$+ i\frac{\varepsilon}{R}(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) = 0$$

son équation. Supposons que les quatre paramètres α_1, α_2, α_3, α_4, dont dépend la sphère, soient liés à α, β, γ, δ, ε par les relations

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sin\alpha_1,\\
\beta &= \cos\alpha_1 \sin\alpha_2,\\
\gamma &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3,\\
\delta &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \sin\alpha_4,\\
\varepsilon &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\alpha_4;
\end{aligned}$$

de ce qu'on sait sur les rapports entre la théorie des systèmes de cinq sphères deux à deux orthogonales et celle des substitutions linéaires orthogonales à cinq variables, il résulte que les cinq sphères

$$S = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_4} = 0$$

forment un système de cinq sphères deux à deux orthogonales; on observera que parmi ces cinq sphères deux dégénèrent en des plans.

Ces cinq sphères peuvent donc être prises pour sphères fondamentales d'un système de coordonnées pentasphériques.

3. A chaque point de la surface S est associé un trièdre trirectangle; cherchons si, sur cette surface S, il existe une courbe C telle que le trièdre mobile associé à chacun de ses points soit le trièdre de Serret-Frenet de C. En excluant des cas de dégénérescences en courbes planes, on voit que C *est une hélice pour*

son cylindre projetant sur Oxy, *une asymptotique de* S *et*, *par conséquent*, *une ligne de plus grande pente de* S; d'après une remarque qui se trouve, en note, au bas de la page 475 du Tome I des *Leçons*, de M. Darboux, *cette courbe* C *aura pour image sphérique un parallèle de la sphère.*

Un premier exemple est celui de la surface minima d'Enneper, convenablement orientée : c'est là un exemple de surface S possédant un nombre fini de courbes C, pour une orientation donnée.

Pour que, sur S, il y ait une infinité de courbes C, il faut que les *lignes de plus grande pente soient des asymptotiques :* S doit donc être une intégrale de l'équation (en coordonnées ordinaires)

$$rp^2 + 2pqs + tq^2 = 0;$$

cette équation est réductible, par la transformation de Legendre, à celle, étudiée par M. Bianchi, dont dépendent les surfaces pour lesquelles les asymptotiques d'un système sont situées sur des cylindres de révolution coaxiaux; on vérifiera que les coordonnées de tout point de S s'expriment en fonction de deux paramètres ψ et u par les formules

$$x = e^u\left(-\cos\psi\frac{\partial V}{\partial u} - \sin\psi\frac{\partial V}{\partial\psi}\right),$$
$$y = e^u\left(-\sin\psi\frac{\partial V}{\partial u} + \cos\psi\frac{\partial V}{\partial\psi}\right),$$
$$z = V + \frac{\partial V}{\partial u},$$

dans lesquelles V est l'intégrale générale de l'*équation du mouvement de la chaleur*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2} = \frac{\partial V}{\partial u};$$

toutes les lignes de plus grande pente de S étant des asymptotiques de S sont des hélices de leurs cylindres projetants sur Oxy et, par conséquent, sont des courbes C.

Lorsque la surface S dégénère en une courbe, à chacun de ses points est associée une infinité simple de trièdres mobiles; le trièdre de Serret-Frenet de la courbe est un de ces trièdres si la courbe est une hélice pour son cylindre projetant sur Oxy.

4. Lorsque le point M de contact de (1) avec S décrit une courbe sur S, les projections de son déplacement infinitésimal sur les axes mobiles sont respectivement

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} dx_1 &= 0,\\ dy_1 &= \mathrm{D}\,d\varphi + \mathrm{D}'\,d\psi = \frac{dz}{\cos\varphi},\\ dz_1 &= \frac{\mathrm{D}'\,d\varphi + \mathrm{D}''\,d\psi}{\cos\varphi},\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D} &= \varpi + r \qquad = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial z}{\partial\varphi},\\ \mathrm{D}' &= q\operatorname{tang}\varphi + s = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi},\\ \mathrm{D}'' &= \varpi\cos^2\varphi - p\sin\varphi\cos\varphi + t;\end{aligned}\right.$$

r, s, t désignent les dérivées $\frac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi^2}$, $\frac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi\,\partial\psi}$, $\frac{\partial^2\varpi}{\partial\psi^2}$; D, D′, D″ sont les coefficients de la seconde forme fondamentale de Gauss, dans les notations de Bianchi.

De ces relations (5) et (6) résultent tout d'abord les expressions des coefficients de la première forme fondamentale

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathrm{D}^2 + \frac{\mathrm{D}'^2}{\cos^2\varphi},\\ \mathrm{F} &= \mathrm{D}'\left(\mathrm{D} + \frac{\mathrm{D}''}{\cos^2\varphi}\right),\\ \mathrm{G} &= \mathrm{D}'^2 + \frac{\mathrm{D}'^2}{\cos^2\varphi},\end{aligned}\right.$$

d'où se déduit la relation

$$(8) \qquad H \cos\varphi = D'^2 - DD'' \qquad (H = \sqrt{EG - F^2}).$$

Il résulte également des mêmes expressions (5) que *l'équation différentielle des images sphériques des lignes de niveau est*

$$(9) \qquad D\, d\varphi + D'\, d\psi = 0,$$

et que l'équation des images sphériques des lignes de plus grande pente est

$$(10) \qquad D'\, d\varphi + D''\, d\psi = 0;$$

on observera, en effet, que φ et ψ sont les coordonnées géographiques de l'image sphérique de M dans la représentation de Gauss.

5. Cherchons la condition pour qu'une droite issue de M et liée au trièdre mobile engendre une congruence de normales.

Soit d une droite issue de M et dont les cosinus directeurs α, β, γ, par rapport aux axes mobiles, sont des fonctions données des coordonnées géographiques de M; soient, d'autre part, α_0, β_0, γ_0 les cosinus directeurs de d par rapport aux axes fixes. Il faut que l'expression

$$\alpha_0\, dx + \beta_0\, dy + \gamma_0\, dz$$

soit une différentielle exacte $-d\lambda$; en vertu des équations (5), il faut qu'il en soit de même de l'expression

$$-d\lambda = \beta(D\, d\varphi + D'\, d\psi) + \frac{\gamma}{\cos\varphi}(D'\, d\varphi + D''\, d\psi);$$

la condition à établir est donc

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\beta D + \frac{\gamma D'}{\cos\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\beta D' + \frac{\gamma D''}{\cos\varphi}\right).$$

Dans (11), α a disparu et cette relation est laissée invariante lorsqu'on multiplie β et γ par un même facteur constant : *c'est là le théorème de Malus;* α_i, β_i, γ_i étant, en effet, les cosinus directeurs du rayon incident en M sur la surface S supposée dirimante, les cosinus directeurs α_r, β_r, γ_r du rayon réfracté sont liés aux précédents par les égalités

$$\beta_i = n\beta_r, \qquad \gamma_i = n\gamma_r,$$

dans lesquelles n est l'indice de réfraction relatif des milieux optiques séparés par la surface dirimante.

Appliquons (11) au cas où la droite d est invariablement liée au trièdre mobile; β et γ sont des constantes et nous poserons

$$\gamma = \beta \operatorname{tang} V.$$

Remarquons que D, D′, D″ satisfont aux relations

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial D}{\partial \psi} - \frac{\partial D'}{\partial \varphi} = -D' \operatorname{tang}\varphi, \\ &\frac{\partial D'}{\partial \psi} - \frac{\partial D''}{\partial \varphi} = \operatorname{tang}\varphi(D'' + D\cos^2\varphi); \end{aligned}\right.$$

la condition (11) prend la forme

$$(13)\qquad D' = \operatorname{tang} V \times D \cos\varphi.$$

Écartons, pour l'instant, les cas extrêmes $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$; l'équation (13) est une équation aux dérivées partielles du second ordre qui peut être intégrée en la mettant sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \operatorname{tang} V \cos\varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi};$$

intégrant et utilisant l'équation (4), on obtient

$$\varpi = \Psi \cos\varphi + \cos\varphi \int \mathcal{F}_1\left[\psi \operatorname{tang} V + \log\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi};$$

en profitant de la présence d'une fonction arbitraire $\mathfrak{F}_1$, on peut faire disparaître le signe de quadrature et prendre pour intégrale générale de (13)

$$(14) \qquad \varpi = \Psi \cos\varphi + \sin\varphi\, \mathfrak{F}(\tau) - \mathfrak{F}'(\tau),$$

où Ψ et $\mathfrak{F}$ sont respectivement deux fonctions arbitraires de ψ et de la variable τ

$$\tau = \psi \operatorname{tang} V + \log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right];$$

$\mathfrak{F}'$ est la dérivée de $\mathfrak{F}$ par rapport à τ.

La condition (13) s'interprète aisément à l'aide de l'équation (9) des lignes de niveau :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite invariablement liée au trièdre mobile et issue de M *engendre une congruence de normales est que les lignes de niveau de* S *aient pour images sphériques une famille de loxodromies.*

Lorsqu'il existe une droite issue de M invariablement liée au trièdre mobile engendrant une congruence de normales, il est bien entendu qu'il existe une infinité de telles droites; nous retiendrons seulement qu'il en existe une d_1 située dans le plan tangent à S : il suffit d'appliquer le théorème de Malus et de donner à l'indice de réfraction la valeur qui correspond au cas intermédiaire entre la réfraction et la réflexion totale.

On connaît donc une solution du problème de Transon pour le complexe spécial attaché à une surface dont les lignes de niveau ont des loxodromies pour images sphériques.

On peut encore dire que ces mêmes surfaces (14) sont caractérisées par la propriété suivante, qui permet d'ailleurs d'écrire immédiatement leur équation cartésienne

$$\operatorname{tang} V = \frac{pq(r-t) + (q^2 - p^2)s}{q^2 r - 2pqs + tp^2} :$$

Sur une surface dont les lignes de niveau ont des loxodromies pour images sphériques, il existe une famille de géodésiques qui sont les trajectoires des lignes de niveau sous un angle constant déterminé. Ces géodésiques sont identiques aux méridiens de la surface (1).

Passons à l'examen des cas limites $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Lorsque γ est nul, D' est nul et, par suite, aussi F en vertu de (7); les parallèles et les méridiens sont conjugués et orthogonaux : la surface S est alors telle que ses lignes de courbure sont constituées par ses lignes de niveau (les parallèles) et par ses lignes de plus grande pente (les méridiens); c'est donc la *surface moulure* la plus générale. D'où le théorème :

Si une droite, autre que la normale, issue de M, *située dans le plan* $z_1 = 0$ *et invariablement liée au trièdre mobile, engendre une congruence de normales, il en est de même de toutes les droites de ce plan issues de* M *et la surface* S *est une surface moulure quelconque*

$$\varpi = \Phi(\varphi) + \Psi(\psi)\cos\varphi.$$

Lorsque β est nul, D est nul. Les lignes de niveau (les méridiens) sont des asymptotiques et la surface est une surface réglée à plan directeur horizontal. Par

(1) Selon Minding [*Ueber einige Grundformeln der Geodäsie* (*Crelle*, 1852)] j'appelle *méridiens* les courbes $\psi = \text{const.}$, et *parallèles* les courbes $\varphi = \text{const.}$

suite, *si une droite, autre que la normale, issue de* M, *située dans le plan* $y_1 = 0$ *et invariablement liée au trièdre mobile, engendre une congruence de normales, il en est de même de toutes les droites de ce plan issues de* M *et la surface* S *est une surface réglée à plan directeur horizontal :*

$$(15) \qquad \varpi = \Psi_1 \cos\varphi + \Psi_2 \sin\varphi.$$

6. La surface (14), la plus simple, est celle pour laquelle $\mathcal{F}(\tau)$ est une fonction linéaire de τ; son équation peut être réduite à

$$(16) \quad \varpi = \sin V.\psi \sin\varphi + \cos V \left[\sin\varphi \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right];$$

cette surface est la seule surface minima qui satisfasse à la condition (13); elle s'obtient en prenant les expressions

$$\frac{e^{-iV}}{2u^2}, \quad \frac{e^{iV}}{2v^2}$$

pour les fonctions qui figurent dans les équations d'Enneper. Lorsque V varie, ces surfaces (16) constituent une famille connue de surfaces minima associées, applicables les unes sur les autres (*Leçons* de M. Darboux, n° 200, *hélicoïdes de Scherk*); elles comprennent comme variétés limites

$$V = 0 \qquad \text{et} \qquad V = \frac{\pi}{2},$$

le caténoïde

$$\varpi = \sin\varphi \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1,$$

seule surface minima qui soit une surface moulure, et l'hélicoïde gauche à plan directeur

$$(17) \qquad \varpi = \psi \sin\varphi,$$

seule surface minima qui soit une surface réglée.

En observant que la représentation sphérique de Gauss est une représentation conforme pour toutes les surfaces minima, on a le théorème suivant :

Pour la surface minima (16), *les lignes de niveau, les lignes de plus grande pente, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure ont des loxodromies pour images sphériques.*

Sur la surface minima (16), *les parallèles, les méridiens, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure sont des loxodromies.*

Les équations des images sphériques des principales lignes sont :

Lignes de niveau :

$$z = \sin V . \psi + \cos V \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.};$$

lignes de plus grande pente :

$$\cos V . \psi - \sin V \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.};$$

asymptotiques :

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{V}{2}\right) \cdot \psi - \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.},$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{V}{2}\right) \cdot \psi + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.};$$

lignes de courbure :

$$\operatorname{tang}\frac{V}{2} \cdot \psi + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.},$$

$$\cot\frac{V}{2} \cdot \psi - \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.}$$

Les méridiens, orthogonaux aux parallèles puisque la surface est minima, sont des courbes *dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire;* pour la surface (16), en effet, les formules générales donnant les coordonnées du point M deviennent

$$(18)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{\cos V \cos\psi}{\cos\varphi} - \sin V \sin\psi \operatorname{tang}\varphi, \\ y = -\dfrac{\cos V \sin\psi}{\cos\varphi} + \sin V \cos\psi \operatorname{tang}\varphi, \\ z = \sin V . \psi + \cos V \log\left[\left(\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]; \end{cases}$$

et, par suite, le long d'un méridien, on a

$$y\,dx - x\,dy = \sin V\,dz.$$

Ces méridiens, nous l'avons dit, sont des géodésiques particulières; la surface (16) étant une surface harmonique, on obtient pour équation des images sphériques des géodésiques (ψ_0 et k étant leurs paramètres)

$$\cos\varphi = \operatorname{sn}\frac{\psi - \psi_0}{k},$$

le module des fonctions elliptiques étant k; interprétant cette équation selon Liouville, on voit que ces géodésiques jouissent de la propriété caractéristique suivante : soit ω l'angle que fait une géodésique issue de M avec le méridien de ce point; le long de chaque géodésique on a

$$\frac{\sin\omega}{\sin\varphi} = \text{const.} = k.$$

Pour $k = 0$, les géodésiques se réduisent aux méridiens. En laissant de côté le cas de l'hélicoïde (17) pour lequel les méridiens sont des droites, les tangentes aux méridiens constituent une congruence de normales; on a

$$\lambda = -\operatorname{tang}\varphi,$$

et, des formules (18), il résulte que ces droites sont normales à la surface

$$x = -\cos V \cos\varphi \cos\psi, \qquad y = -\cos V \cos\varphi \sin\psi;$$
$$z = \sin V.\psi + \cos V \left\{ \log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] - \sin\varphi \right\};$$

celle-ci est un hélicoïde, conformément d'ailleurs au théorème de Lie et de M. Picard sur les surfaces dont les normales appartiennent au complexe linéaire; cet hélicoïde est engendré par le déplacement hélicoïdal d'une tractrice de base Oz. Pour $V = 0$, il dégénère en la surface pseudosphérique de révolution et, pour $V = \frac{\pi}{2}$, en un hélicoïde gauche à plan directeur.

7. Les formules (12) ne sont autres que deux formules de Mainardi et Codazzi. Elles sont absolument fondamentales, et nous allons en indiquer des applications. De ces relations (12) résultent les équations générales

$$D \cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial\varphi}, \qquad D' \cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial\psi},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2} - \sin\varphi \cos\varphi \frac{\partial z}{\partial\varphi} = \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{D''}{\cos\varphi}\right).$$

Comme premier exemple, considérons les surfaces, intégrales d'une équation du troisième ordre, pour lesquelles $\frac{D''}{\cos\varphi}$ ne dépend que de la longitude ψ. En posant

$$u = \log \operatorname{tang}\varphi,$$

l'équation à intégrer est l'*équation du mouvement de la chaleur*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2} = \frac{\partial z}{\partial u};$$

soit alors z une intégrale de cette dernière équation;

la formule (4) donne

$$\frac{\varpi}{\cos\varphi} = \Psi(\psi) + \int z \frac{a\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Nous avons précédemment considéré les surfaces dont les lignes de plus grande pente sont des asymptotiques. Leur équation est $D'' = 0$, et nous sommes donc dans un cas particulier du cas précédent. On observera que les équations de Mainardi et Codazzi deviennent alors

$$\frac{\partial B}{\partial \psi} = \frac{\partial A}{\partial u}, \qquad \frac{\partial A}{\partial \psi} = B,$$

en posant

$$A = D' \cos\varphi, \qquad B = D \sin\varphi \cos^2\varphi;$$

ces équations simultanées sont précisément celles que M. Bourlet envisage dans sa Thèse : *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (p. 51) : l'élimination de B conduit à l'équation du mouvement de la chaleur.

On peut encore mettre l'équation

$$D'' \equiv \varpi \cos^2\varphi - p \sin\varphi \cos\varphi + t = 0$$

sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\left(\frac{\varpi}{\sin\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varpi}{\sin\varphi}\right), \qquad u = \log \operatorname{tang}\varphi;$$

$\dfrac{\varpi}{\sin\varphi}$ est intégrale de l'équation du mouvement de la chaleur : c'est la fonction V des formules du n° 3.

8. Comme second exemple, je considérerai les surfaces dont les lignes de courbure ont des loxodromies pour images sphériques.

L'équation des images sphériques des lignes de courbure étant

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi\, d\psi^2 + \frac{D'' - D\cos^2\varphi}{D'}\, d\varphi\, d\psi = 0,$$

ces lignes de courbure auront pour images sphériques les loxodromies

$$d\varphi = \quad \operatorname{tang} V \cos\varphi\, d\psi,$$
$$d\varphi = - \quad \cot V \cos\varphi\, d\psi,$$

si z satisfait à une certaine équation du second ordre qui, en posant

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = d\tau, \qquad z = \frac{U}{\operatorname{ch}\tau},$$

prend la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} - U - 2\cot 2V\, \frac{\partial^2 U}{\partial\tau\, \partial\psi};$$

il suffit alors d'effectuer la transformation

$$\tau = A\tau_1 + B\psi_1,$$
$$\psi = A'\tau_1 + B'\psi_1,$$

A, B, A', B' étant des constantes déterminées, pour se ramener à l'une ou l'autre des équations

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\psi_1^2} - U = 0,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau_1\, \partial\psi_1} + U = 0;$$

La première de ces équations est celle à laquelle M. H. Poincaré ramène l'*équation des télégraphistes* (1); la seconde est la forme que donne

---

(1) *Sur la propagation de l'électricité* (*Comptes rendus*, t. CXVII, p. 1027), et *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, p. 134.

M. Picard à cette même équation des télégraphistes [1].

En résumé, la *détermination des surfaces dont les images sphériques des deux systèmes de lignes de courbure sont des loxodromies est équivalente à l'intégration de l'équation des télégraphistes.* C'est là un théorème général qui comprend comme cas particulier celui que j'ai donné dans une Note antérieure [2].

9. Les deux exemples précédents suffisent pour mettre en évidence l'importance des relations (12).

Comme autres exemples, j'indiquerai celui des surfaces

$$D'' + D \sin^2\varphi \cos^2\varphi = 0,$$

dont les asymptotiques se projettent sur Oxy suivant un réseau orthogonal et celui des surfaces minima

$$D'' + D \cos^2\varphi = 0,$$

Dans chacun de ces cas, on se ramène à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2} = 0;$$

dans le premier cas, τ est égal à $\log(\operatorname{tang}\varphi)$; dans le second, à $\log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$. On utilisera ensuite l'équation (4), et l'on écrira que l'intégrale trouvée, dépendant de trois fonctions arbitraires, satisfait à

---

(1) *Sur l'equation aux dérivées partielles qui se rencontre dans la théorie de la propagation de l'électricité* (*Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 16).

(2) *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 22).

l'équation du second ordre. Je reviendrai, d'ailleurs, ultérieurement sur ces équations et je donnerai de nouveaux exemples d'applications des équations (12) : j'étudierai notamment l'équation analogue à celle du mouvement de la chaleur, dont dépendent les surfaces pour lesquelles les asymptotiques ont des loxodromies pour images sphériques.

10. Déterminons l'enveloppe d'un plan invariablement lié au trièdre mobile; soient u, v, w, h les coordonnées de ce plan; ξ, η, ζ les coordonnées de son point de contact, par rapport aux axes mobiles. Nous avons les formules linéaires

$$u\xi + v\eta + w\zeta + h = 0,$$
$$-u\eta + v(\xi + D) + \frac{wD'}{\cos\varphi} = 0,$$
$$-u\zeta\cos\varphi + v(\xi\sin\varphi + D') + w\left(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi + \frac{D''}{\cos\varphi}\right) = 0,$$

qui permettent de calculer ξ, η, ζ.

Considérons, en particulier, le cas des faces du trièdre mobile.

En général, le plan (3) n'a pas d'enveloppe autre que le point à l'infini sur Oz. *Pour que le plan* (3) *ait une enveloppe, il faut et il suffit que la surface* S *soit une surface moulure.* Le plan (3) enveloppe alors un cylindre parallèle à Oz. Le point de contact de (3) avec ce cylindre est sur My_1 ; My_1 engendre une congruence dont les plans focaux sont (1) et (3) : *les arêtes* My_1 *engendrent alors une congruence de normales;* on retrouve ainsi un résultat du n° 5.

En ce qui concerne le plan (2), il a toujours une enveloppe. Cette enveloppe peut se réduire au point O;

la surface S est alors intégrale de l'équation $p = 0$: c'est donc la surface (Σ) du n° 10 de mon Mémoire *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 35). En général, les coordonnées du point de contact sont

$$\xi = -D, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = -\frac{D'}{\sin\varphi};$$

de ces formules résultent les théorèmes suivants :

Pour que le point de contact du plan (2) *avec son enveloppe soit sur la normale à* S, *il faut et il suffit que cette surface soit une surface moulure.*

Pour que le point de contact de (2) *soit dans le plan tangent à* S, *il faut et il suffit que cette surface soit une surface réglée quelconque à plan directeur horizontal.*

11. Aux n^{os} 5 et 10, nous avons rencontré les surfaces moulures $D' = 0$ et les surfaces $D = 0$, réglées, à plan directeur. La théorie des surfaces moulures en coordonnées tangentielles (plus ou moins différentes de celles dont je me sers) étant connue, je m'occuperai uniquement des surfaces $D = 0$ auxquelles je consacrerai la fin de ce Mémoire.

Établissons directement que l'*équation* $D = 0$ *représente les surfaces réglées, à plan directeur horizontal.* La trace de (1) sur le plan horizontal de M, plan dont la cote est fournie par (4), a pour projection horizontale la droite

$$x\cos\psi + y\sin\psi = \varpi\cos\varphi - p\sin\varphi;$$

le second membre ne doit dépendre que de la longitude ψ; d'où la condition

$$\varpi + r \equiv D = 0.$$

L'intégrale est (15). Ψ_1 et Ψ_2 désignent deux fonctions arbitraires de la longitude ψ. Ψ_2 *est la cote de la génératrice*, Ψ_1 *est la plus courte distance de cette génératrice avec* Oz.

Le contour apparent sur Oxy ne dépend que de Ψ_1. Lorsque Ψ_1 est nul, la surface est un conoïde droit de direction Oz; voici des exemples :

Paraboloïde équilatère :

$$z = \frac{x}{y}, \qquad \varpi = \operatorname{tang}\psi \sin\varphi,$$

hélicoïde gauche :

$$z = \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y}, \qquad \varpi = \psi \sin\varphi,$$

cylindroïde de Cayley-Plücker :

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x + y^2}, \qquad \varpi = \cos^2\psi \sin\varphi, \qquad \ldots.$$

En prenant

$$\Psi_1 = a\cos\Psi, \qquad \Psi_2 = a\sin\Psi,$$

Ψ étant une fonction donnée de ψ, on obtient les surfaces

$$\varpi = a\cos(\Psi - \varphi),$$

réglées, à plan directeur, circonscrites à la sphère de centre O et de rayon a. Pour $\Psi = \psi$, la surface est le conoïde de Wallis. La courbe de contact $\Psi - \varphi = 0$ avec la sphère est ici la courbe sphérique lieu des points d'égales longitude et latitude, c'est-à-dire la fenêtre de Viviani (résultat connu).

12. Aux surfaces réglées à plan directeur horizontal, on peut appliquer le théorème de M. Picard sur les asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent au complexe linéaire; on obtient pour images sphériques des asymptotiques les courbes

$$2\,\mathrm{tang}\,\varphi\sqrt{\Psi'_2}+\int\frac{\Psi_1+\Psi''_1}{\sqrt{\Psi'_2}}\,d\psi=\text{const.};$$

cette équation se met sous la forme

$$2\sqrt{\delta}\,\mathrm{tang}\,\varphi+\int\frac{d\sigma}{\sqrt{\delta}}=0,$$

en introduisant le paramètre de distribution δ

$$\delta=\frac{d\Psi_2}{d\psi}=\Psi'_2,$$

et l'élément d'arc $d\sigma$ de la projection sur Oxy du contour apparent horizontal (ligne de striction).

La quadrature disparaît pour

$$\Psi_1+\Psi''_1=0,$$

c'est-à-dire pour les conoïdes. Le fait que les asymptotiques des conoïdes sont connues est classique, et il résulte des recherches de MM. Appell et Picard que ces courbes sont identiques aux courbes dont les tangentes appartiennent aux complexes linéaires; nous obtenons ici une forme simple de l'équation de leurs images sphériques

$$\mathrm{tang}^2\varphi\,\Psi'_2=\mathrm{tang}^2\varphi\,\delta=\text{const.}=k.$$

On pourra appliquer les considérations qui précèdent aux surfaces $\Psi_1=$ const. considérées par M. Buhl à la page 342 des *Nouvelles Annales* de 1909.

Je terminerai en donnant l'expression de la torsion de l'asymptotique. Les relations générales

$$(8)\qquad \begin{aligned} H\cos\varphi &= D'^2 - DD'', \\ \frac{1}{R_1R_2} &= -\frac{\cos\varphi}{H} \end{aligned}$$

deviennent, pour une surface $D = 0$,

$$H = \frac{\delta^2}{\cos^3\varphi}, \qquad \frac{1}{R_1R_2} = -\left(\frac{\cos^2\varphi}{\delta}\right)^2;$$

d'où la torsion $\frac{1}{T}$ de l'asymptotique

$$T = \frac{\delta}{\cos^2\varphi};$$

le rapport du paramètre de distribution de la génératrice issue de M *au rayon de torsion de l'asymptotique passant par* M *est constant le long de tout parallèle d'une surface réglée à plan directeur horizontal.*

En particulier, pour les conoïdes droits, on a

$$T = \frac{k}{\sin^2\varphi};$$

cette dernière formule n'est pas distincte de celle que M. Appell et Sophus Lie ont donnée pour la torsion des courbes dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire.