Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 188-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__188_1>

CORRESPONDANCE.

M. **R. Bouvaist**. — *A propos de la question proposée* 2110. — Dans le numéro de décembre 1909, M. G. Pélissier déduit la solution de la question proposée 2110 de la proposition suivante dont il donne une démonstration analytique :

Si d'un point P *on mène trois normales à une parabole* Π, *l'orthocentre du triangle* T *formé par les tangentes à* Π *aux pieds des normales considérées est sur le diamètre de* Π *passant par* P.

Voici de cette proposition une démonstration géométrique : L'hyperbole d'Apollonius H d'un point P par rapport à une parabole Π est le lieu des points M tels que leurs polaires par rapport à Π soient perpendiculaires à PM. Il en résulte que la tangente à H en P est perpendiculaire à la polaire de P par rapport à Π, et par suite que cette polaire coupe H en deux points α et β tels que l'angle $\alpha P \beta$ est droit. Ceci posé, la polaire réciproque de H par rapport à Π est une parabole Π' dont l'axe est perpendiculaire à celui de Π et qui est inscrite dans le triangle T. Les tangentes issues de P à Π' sont les polaires des points α et β par rapport à Π, elles sont rectangulaires d'après ce qui a été dit plus haut; donc P est sur la directrice de Π', qui contient l'orthocentre de T et qui est parallèle à l'axe de Π.

M. **G. Fontené**. — Dans le Mémoire que j'ai donné récemment sur la théorie du tétraèdre (p. 555 du Volume précédent), le rôle des égalités n'est pas assez marqué :

L'égalité (7) est l'équation en k;

L'égalité (8) donne r en fonction de k;

Les égalités (9) et (10) peuvent remplacer (7) et (8):

L'égalité (11) ou (12) est l'équation en r; la condition de contact prend les formes successives (13), (15), (16), (17) ou (18), puis (19) ou (20) avec r, (21) avec k.

Pour résoudre les équations (7) et (8), on doit écrire

$$(7) \qquad P(P-2M)+2\alpha N=0,$$
$$(8) \qquad (kP^2-N^2)-rN(P-2M)-2\alpha krP=0;$$

en éliminant $P-2M$, à l'aide des multiplicateurs rN et P, on a

$$(kP^2-N^2)(P-2\alpha r)=0;$$

l'hypothèse $kP^2=N^2$ est inadmissible, et l'on doit prendre

$$P=2\alpha r;$$

la relation (8), qui se réduit alors à trois termes, donne, en écartant l'hypothèse inadmissible $N=0$, $P=0$,

$$N+2r(\alpha r-M)=0.$$

Etc.

A la page 567, en haut, il fallait dire qu'on applique la condition de contact, qu'elle donne

$$k=a^2.$$

A la page 564, il faut supprimer la dernière ligne du n° 14.

A la page 570, il faut lire

$$a=b, \qquad c=d,$$

et, plus loin,

$$a=b=-c=-d;$$

au lieu de dire qu'on a écarté l'hypothèse $a=b=c$, il fallait dire que cette hypothèse donne une pyramide triangulaire régulière, et la même observation s'applique à la page 571, ligne 15; quant à l'hypothèse

$$a=b=-c=-d,$$

elle donne un tétraèdre régulier avec r infini, ce qui ne constitue pas une solution du problème.

La note placée à la fin du Mémoire est à supprimer : la chose est dite dans l'énoncé.

Philbert du Plessis. — La solution donnée de la question 2113 [1] (1909, p. 574) fait appel à une vue de l'espace. Voici comment on peut démontrer la proposition sans sortir du plan :

Je raisonne sur la figure de la page 575, ainsi complétée : je mets la lettre O au point de rencontre des diagonales AC et BD, et je prolonge PQ jusqu'en son point de rencontre S avec AB.

Si l'on pose

$$\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PB}} = p, \qquad \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{QM}} = q, \qquad \frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{RO}} = r,$$

on trouve immédiatement que

$$\frac{\mathrm{SB}}{\mathrm{SM}} = \frac{2}{2-p} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{RA}} = \frac{r}{2-r}.$$

Cela posé, le triangle MBC coupé par la transversale QPS et le triangle MAC coupé par la transversale BQR donnent respectivement

$$pq\frac{2}{2-p} = 1 \qquad \text{et} \qquad q\frac{r}{2-r}2 = 1$$

ou

$$2pq = 2-p \qquad \text{et} \qquad 2qr = 2-r,$$

d'où résulte que

$$p = r.$$

Donc PR est parallèle à BO, c'est-à-dire perpendiculaire à AC. Il en résulte que le quadrilatère ABPR est inscriptible, donc que

$$\widehat{\mathrm{BAP}} = \widehat{\mathrm{BRP}} = \widehat{\mathrm{DBR}}.$$

C. Q. F. D.

---

[1] Il y a une faute d'impression dans cette solution. Il faut lire (p. 575, ligne 6) : « le plan (B'M'C) » et non « le plan (B'M'C') ».

M. **E.-N. Barisien.** — Après de longues recherches, je suis parvenu à l'expression suivante de l'aire commune à une ellipse et à sa développée (axes $2a$ et $2b$) :

$$A = \frac{3c^4}{4ab} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2-2b^2}}\right)$$
$$-2ab \arcsin\left[\frac{a}{c}\left(\frac{a^2-2b^2}{2a^2-b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$-\frac{3(a^4+b^4-4a^2b^2)\sqrt{(a^2-2b^2)(2a^2-b^2)}}{4(a^2+b^2)^2},$$

qui est, je crois, inédite. La formule ne s'applique que si l'ellipse et sa développée se coupent aux points réels

$$x = \pm\frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad y = \pm\frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Alors $a > b\sqrt{2}$.

M. **Georges Delbouis.** — *Au sujet de la dérivation sous le signe* $\int$. L'intégrale multiple de

$$I = \int_E f(x, y, \ldots, \alpha)\, de,$$

α restant intérieur à un domaine Δ définit, moyennant certaines hypothèses, une fonction I de α qui admet une dérivée représentée par l'intégrale

$$(1) \qquad \int_E f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha)\, de,$$

ceci en supposant que les domaines E et Δ ne dépendent pas l'un de l'autre.

Qu'arrive-t-il si, au contraire, le champ d'intégration E dépend de α?

Dans le cas des intégrales définies, on applique la règle de dérivation des fonctions composées. Mais si l'intégrale est multiple, la dérivée de $I(\alpha)$ se présente comme la limite de l'expression

$$\frac{\mathop{\mathrm{S}}_{\mathrm{E}+\Delta\mathrm{E}} f(x, y, \ldots, \alpha + \Delta\alpha)\, de - \mathop{\mathrm{S}}_{\mathrm{E}} f(x, y, \ldots, \alpha)\, de}{\Delta\alpha}$$

qui ne donne pas de résultat simple immédiat.

Or on peut, dans certains cas, se ramener au calcul d'une expression de la forme (1) :

1° Le domaine d'intégration est soit un cercle dont le centre et le rayon sont des fonctions de α, soit une ellipse dont le centre et les longueurs des axes sont des fonctions de α.

On fera, dans le premier cas, le changement de variable

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ku \cos\varphi, \qquad & u(0, 1), \\ y &= y_0 + ku \sin\varphi, \qquad & \varphi(0, 2\pi), \end{aligned}$$

et le nouveau domaine d'intégration est un rectangle qui ne dépend pas de α.

Dans le cas de l'ellipse, on poserait de même

$$\begin{aligned} x &= x_0 + au \cos\varphi, \\ y &= y_0 + bu \sin\varphi. \end{aligned}$$

2° On poserait de même, dans le cas où le domaine d'intégration serait une sphère ou un ellipsoïde :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ku \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= y_0 + ku \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= z_0 + ku \cos\theta, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x &= x_0 + au \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= y_0 + bu \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= z_0 + cu \cos\theta. \end{aligned}$$

D'une manière générale on cherchera à exprimer les variables $x, y, \ldots$, en fonctions de nouvelles variables $u, v, \ldots$ et de fonctions de α, de façon que le nouveau champ d'intégration obtenu ne dépende plus de la variable α.