NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Sur certains systèmes orthogonaux du plan et sur les surfaces intégrales de l'équation de Laplace $r + t = 0$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 87-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__87_0>

[O'2kβ]

SUR CERTAINS SYSTÈMES ORTHOGONAUX DU PLAN ET SUR LES SURFACES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION DE LAPLACE $r+t=0$;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Dans le plan Oxy rapporté à des axes rectangulaires Ox, Oy, soit une famille de courbes (C),

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$

dépendant du paramètre λ. L'angle α avec Ox de la tangente en un point $M(x, y)$ du plan à l'une des courbes (C) qui passent par M est, après élimination de λ, une fonction de (x, y).

L'objet de cette Note est de démontrer les propriétés suivantes :

1° Si α est une intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta_2 \alpha = 0,$$

les trajectoires, sous un angle constant donné, des courbes (C) se déterminent par quadratures.

2° Le réseau formé par les courbes (C) et leurs trajectoires orthogonales est constitué par l'ensemble des projections des asymptotiques d'une même surface. La détermination de cette surface dépend de quadratures.

Réciproquement, si les asymptotiques d'une surface se projettent sur Oxy suivant un réseau orthogonal, cette surface est intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta_2 z = 0,$$

et les courbes du réseau jouissent de la propriété

$$\Delta_2 \alpha = 0.$$

3° Dans cette troisième Partie, j'indique des cas particuliers de ces surfaces et une étude des surfaces

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = ar^{\mathrm{K}}\sin \mathrm{K}\theta.$$

PREMIÈRE PARTIE.

Introduisons les coordonnées isotropes du plan

$$u = x + iy = re^{i\theta}, \qquad v = x - iy = re^{-i\theta};$$

le ds^2 du plan est

$$ds^2 = du\,dv;$$

définissons l'angle α par les relations

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\sin\alpha} = ds,$$

c'est-à-dire par la relation

$$dv = e^{-2i\alpha}\,du.$$

Théorème. — *Si α est une intégrale de l'équation de Laplace, les courbes* (C) *se déterminent par quadratures.*

Soit

$$\alpha = \mathrm{U} - \mathrm{V},$$

U et V étant des fonctions respectives de u et de v; l'équation différentielle des courbes (C) est

$$e^{-2i\mathrm{U}}\,du = e^{-2i\mathrm{V}}\,dv;$$

les variables étant séparées, l'équation s'intègre par quadratures

$$\int e^{-2i\mathrm{U}}\,du - \int e^{-2i\mathrm{V}}\,dv = \text{const.}$$

Théorème. — *Si $\Delta_2\alpha$ est nul, les trajectoires sous un angle donné des courbes (C) se déterminent par quadratures.*

L'angle α', pour les trajectoires sous l'angle ϖ des courbes (C), sera

$$\alpha' = \alpha + \varpi;$$

$\Delta_2\alpha$ et $\Delta_2\alpha'$ seront nuls simultanément. Les trajectoires seront données par des quadratures.

Pratiquement, on prendra

$$\alpha' = U' - V',$$

avec

$$U' = U + \frac{1}{2}\varpi, \qquad V' = V - \frac{1}{2}\varpi;$$

l'équation des trajectoires sera

$$e^{-i\varpi}\int e^{-2iU}\,du - e^{i\varpi}\int e^{-2iV}\,dv = \text{const.}$$

Exemples (¹). — I. *Paraboles homofocales :*

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \text{const.},$$
$$4i\alpha = \log u - \log v;$$

les trajectoires sont les courbes

$$e^{i\varpi}\sqrt{u} - e^{-i\varpi}\sqrt{v} = \text{const.},$$

c'est-à-dire (résultat connu) les paraboles de même foyer

$$\sqrt{r}\sin\left(\varpi + \frac{1}{2}\theta\right) = \text{const.}$$

(¹) A propos des trajectoires obliques, *voir* la question 1105 des *Nouvelles Annales* (Haton de la Goupillière). La méthode précédente peut être appliquée à certains des exemples proposés dans cette question.

II. *Hyperboles équilatères* $xy = \text{const.}$:

$$-2i\alpha = \log u - \log v;$$

les trajectoires obliques sont les hyperboles équilatères d'un faisceau

$$e^{-i\varpi}v^2 - e^{i\varpi}u^2 = \text{const.},$$
$$\sin\varpi(x^2 - y^2) + 2\cos\varpi\, xy = \text{const.},$$
$$r^2 \sin(2\theta - \varpi) = \text{const.}$$

Remarque I. — L'équation

$$\Delta_2 \alpha = 0$$

est invariante lorsqu'on prend une autre direction pour Ox. En outre, comme la fonction $\theta = \text{arc tang}\, \frac{y}{x}$ satisfait à l'équation de Laplace, l'angle V du rayon vecteur issu du point O avec la tangente en M satisfera, lui aussi, à l'équation de Laplace. Si donc, pour un point O du plan, on a

$$\Delta_2 V = 0,$$

cette relation sera vraie lorsqu'on remplacera O par tout autre point.

Remarque II. — En égalant à une constante α_0 la fonction α, on obtient une courbe qui est le *lieu des points de contact des courbes* C *avec les tangentes de direction donnée,* ou encore le *lieu des points d'incidence des normales de direction donnée.* Lorsque α_0 varie, les courbes correspondantes constituent une famille de courbes à un paramètre : elle sera isotherme quand $\Delta_2 \alpha$ sera nul.

Comme premier exemple, citons les paraboles homofocales . les courbes $\alpha = \alpha_0$ sont les droites issues de O.

Comme second exemple [1], citons les coniques homofocales : les courbes $\alpha = \alpha_0$ sont les hyperboles équilatères du faisceau

$$\frac{y^2 - x^2 + c^2}{xy} = \text{const.},$$

trajectoires orthogonales des cartésiennes lieux des points M tels que

$$\text{MF} \times \text{MF}' = \text{const.},$$

F et F′ étant les foyers des coniques homofocales.

DEUXIÈME PARTIE.

Prenons pour équation des projections orthogonales, sur le plan Oxy, des asymptotiques d'une surface

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Théorème. — *Pour que les projections sur Oxy des asymptotiques d'une surface constituent un réseau orthogonal, il faut et il suffit que la surface soit une surface intégrale de l'équation de Laplace*

$$\Delta_2 z = 0 \quad (^2).$$

---

(1) Ce lieu constitue la question n° 119 des *N. C.* (Nicolaïdès). Pour une généralisation, *cf.* les *Nouvelles Annales,* question 1200 (Gambey) et les *Nouvelles Annales* de 1876, p. 549 (Moret-Blanc).

(2) Cette équation, $r + t = 0$, a été pour la première fois, du point de vue géométrique, considérée par Meusnier; il se proposa de chercher les surfaces minima la vérifiant. Le résultat auquel il parvint (c'est-à-dire le théorème de Catalan) découle immédiatement de l'interprétation géométrique que nous donnons ici de l'équation $r + t = 0$ et de la propriété connue des asymptotiques d'une surface minima.

Théorème. — *La détermination des asymptotiques d'une surface $\Delta_2 z = 0$ s'effectue par quadratures.*

En posant

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = i\frac{v-u}{2}, \qquad z = U - V,$$

on trouve, pour équation des asymptotiques,

$$U'' du^2 - V'' dv^2 = 0,$$

d'où

$$\int \sqrt{U''}\, du \pm \int \sqrt{V''}\, dv = \text{const.}$$

Exemples. — I. *Surface $\Delta_2 z = 0$, de révolution autour de Oz.*

La seule surface $\Delta_2 z = 0$, de révolution, est la surface engendrée par la courbe logarithmique

$$z = a \log \frac{x^2 + y^2}{b}.$$

Les asymptotiques déterminées en la considérant soit comme une surface de révolution, soit comme une surface de Jamet, soit comme une surface $\Delta_2 z = 0$, sont, en projection, les spirales logarithmiques

$$r\, d\theta = \pm\, dr \quad (^1).$$

(¹) Il est curieux de signaler la grande analogie de calculs et de résultats qui se présentent dans cette question et dans l'étude thermique d'un plan indéfini; dans le cas d'une source de chaleur punctiforme et le potentiel thermique étant

$$T = T_0 \log(x^2 + y^2),$$

les lignes de flux sont les spirales logarithmiques

$$d\theta = -a \frac{dr}{r}.$$

II. $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$: les asymptotiques se projettent suivant les faisceaux orthogonaux d'hyperboles équilatères

$$x^2 - y^2 = \pm 2xy + \text{const.} \quad (^1).$$

Nous donnerons d'autres exemples dans la troisième Partie de cette Note.

Condition pour qu'un réseau orthogonal soit constitué par les projections des asymptotiques d'une même surface.

L'équation différentielle d'un réseau orthogonal est

$$dv^2 = e^{-4i\alpha}\, du^2.$$

Pour que l'équation prenne la forme

$$\mathrm{U}''\, du^2 - \mathrm{V}''\, dv^2 = 0,$$

il faut

$$-4i\alpha = \log \mathrm{U}'' - \log \mathrm{V}'', \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_2 \alpha = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante est que α satisfasse à l'équation de Laplace.

La détermination de la surface correspondante est équivalente à celle de U et de V connaissant U″ et V″, c'est-à-dire à quatre quadratures au plus.

Remarque. — Je signale, afin de simplifier certains calculs, qu'étant donné le réseau orthogonal

$$y'^2 - 1 = 2y'\, \mathrm{P}(x, y),$$

---

(1) Sur cette surface et ses asymptotiques, *cf.* les compositions de licence données à Montpellier en 1896 et à Grenoble en 1895. Les asymptotiques dans l'espace sont des courbes du quatrième ordre; deux asymptotiques qui se rencontrent sont situées sur une même quadrique. La détermination des asymptotiques de cette surface peut être encore faite en la considérant comme une surface de Jamet.

la condition $\Delta_2 \alpha = 0$ s'écrit

$$\frac{\Delta_2 P}{\Delta_1 P} = \frac{2P}{P^2 + 1}.$$

TROISIÈME PARTIE.

Surfaces $\Delta_2 z = 0$ *se rencontrant dans une représentation des fonctions analytiques.* — Dans sa Thèse ([1]), M. Laurent associe à toute fonction $f(x+iy)$ la surface obtenue en portant sur la perpendiculaire au plan (x, y), au point (x, y), un segment z égal au module de f.

Le calcul montre que ces surfaces ne sont pas arbitraires et satisfont à l'équation

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} = \frac{1}{z}.$$

En posant $z = e^Z$, elle devient

$$\Delta_2 Z = 0 \quad ([2]).$$

D'où une interprétation intéressante des surfaces $\Delta_2 z = 0$.

Surfaces $\Delta_2 z = 0$ *se rencontrant dans le calcul des variations.* — Le calcul des variations appliqué à

$$\int\int (p^2 + q^2)\, dx\, dy$$

condnit aux surfaces $\Delta_2 z = 0$. Cette propriété est im-

---

([1]) H. LAURENT, *Sur la continuité des fonctions imaginaires.* Thèse, 1865.

([2]) Ce dernier calcul se trouve fait par Jamet (*N. C.*, 1877, p. 364); il démontre que, si $\Delta_2 z$ est nul, on a

$$\Delta_2(\log \Delta_1 z) = 0.$$

portante au point de vue de l'existence (*cf.* les travaux de Riemann, Hilbert, etc.).

Une classe particulière de surfaces $\Delta_2 z = 0$. — Puisque la fonction $\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$ satisfait à l'équation de Laplace, la fonction $\alpha = (m+1)\theta$ satisfera à cette équation. Le réseau des courbes (C) est formé par les courbes (spirales sinusoïdes)

$$\begin{cases} r^m = a^m \sin m\theta, \\ r^{-m} = b^m \sin m\theta. \end{cases}$$

La surface correspondante est

$$z = A r^{-2m} \sin 2m\theta.$$

Théorème. — *Pour une surface*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = A r^K \sin K\theta \qquad (K \neq 1),$$

les lignes de niveau, les lignes de plus grande pente, les lignes asymptotiques (constituant un réseau orthogonal en projection), sont des courbes du type

$$r^\mu = a^\mu \sin\mu\theta.$$

Pour une telle surface, le calcul donne

$$\begin{aligned} H^2 &= EG - F^2 = r^2 + A^2K^2r^{2K}, \\ D &= \quad AK(K-1)r^{K-1} \sin K\theta, \\ D' &= \quad AK(K-1)r^K \cos K\theta, \\ D'' &= -AK(K-1)r^{K+1} \sin K\theta, \\ D'^2 - DD'' &= A^2K^2(K-1)^2 r^{2K}. \end{aligned}$$

La courbure totale ne dépend donc que de la distance du point à l'axe Oz.

Par suite, *la torsion en un point de toute asymptotique ne dépend que de la distance du point à l'axe* Oz.

Remarque. — Les surfaces de paramètres K et — K se correspondent, du point de vue des lignes de niveau et de plus grande pente et des lignes asymptotiques, projetées sur Oxy, par inversion de pôle O dans ce plan.

La surface $K = -1$ seule fait exception, car il faut excepter de tout ce qui précède la valeur $K = 1$. Pour cette valeur $K = -1$, la surface [1] a pour équation cartésienne

$$z = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

C'est une surface cubique dont les lignes de niveau et de plus grande pente sont des cercles en projection sur Oxy [2], et dont les lignes asymptotiques se projettent sur Oxy suivant deux faisceaux orthogonaux de cardioïdes.

Exemples de surfaces de la classe précédente. — En plus de l'exemple précédent, nous citerons les cas suivants :

Valeurs de K.	Équation de la surface.	Lignes de niveau et de plus grande pente.	Projections des asymptotiques.
2...	paraboloïde $z = xy$	hyperboles équilatères	droites
— 2...	$z = \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$	lemniscates de Bernoulli	cercles
4...	$z = xy(x^2 - y^2)$	»	hyperboles équilatères

([1]) Cette surface remarquable a été rencontrée par M. Boussinesq comme transformée par traction horizontale d'un sol horizontal élastique (*Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques,* p. 189).

([2]) Pour une étude détaillée de ces lignes de plus grande pente et de niveau, *cf.* Boussinesq, *Cours d'Analyse,* t. I, p. 232.

Valeurs de K.	Équation de la surface.	Lignes de niveau et de plus grande pente.	Projections des asymptotiques.
$-4\dots$	$z=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}$	»	lemniscates de Bernoulli
$\frac{2}{3}\dots$	»	polaires réciproques de lemniscates de Bernoulli	orthogénides
$-\frac{2}{3}\dots$	»	podaires de lemniscates de Bernoulli	cubiques de Tschirnhausen

Remarque. — Les surfaces précédentes constituent un cas particulier des *surfaces qui sont telles que leurs lignes de niveau et de plus grande pente se projettent sur* Oxy *suivant un réseau orthogonal de courbes intégrales de l'équation de Laplace*

$$\Delta_2\alpha = 0.$$

Définissant une telle surface par son équation cartésienne, on trouve

$$\alpha = -\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{q},$$

$$\Delta_2\alpha = -\frac{\Delta_2 z}{(\Delta_1 z)^2}\,\mathrm{J}\left(\log\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z},\ z\right),$$

J désignant le jacobien.

La condition $\Delta_2\alpha = 0$ est donc équivalente à

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} = \text{fonction de } z,$$

et, par suite, *ces surfaces sont celles dont les lignes de niveau sont isothermes.*

Ce sont encore les surfaces provenant de l'application du calcul des variations aux intégrales doubles de la forme

$$\int\!\!\int f(z)(p^2+q^2)\,dx\,dy.$$