NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Contribution à la théorie du tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 57-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__57_0>

[K13cα]

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette Note est une contribution à la Géométrie *élémentaire* du tétraèdre. J'indiquerai toutefois les faits généraux, donnés par la Géométrie analytique, qui dominent les faits particuliers dont j'aurai à m'occuper.

Je signale à l'attention des lecteurs du Journal un fait de situation (fin du n° 12) que j'ai pu établir seulement pour un tétraèdre ayant un trièdre trirectangle, mais qui reste très probablement exact pour un tétraèdre simplement orthocentrique.

PREMIÈRE PARTIE.

TÉTRAÈDRES QUELCONQUES.

1. Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux quadriques conjuguées à un tétraèdre donné et passant par un point donné est une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre (PAINVIN). Voici un cas particulier. Les quadriques qui passent par les centres des huit sphères inscrites à un tétraèdre ABCD ont pour équation générale, si on les rapporte à ce tétraèdre,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

sous la condition

$$a + b + c + d = 0;$$

ces quadriques sont les hyperboloïdes équilatères qui admettent comme tétraèdre conjugué le tétraèdre ABCD (SALMON, p. 256). Le lieu des centres de ces quadriques est la surface qui a pour équation

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}-\frac{C}{z}+\frac{D}{t}=0,$$

A, B, C, D étant les aires des faces du tétraèdre ; cette surface est le lieu des points dont les projections orthogonales sur les plans des faces du tétraèdre sont dans un même plan. (A. SARTIAUX, *Nouvelles Annales*, 1864, p. 370.)

Parmi les quadriques considérées, il s'en trouve une ayant pour centre le milieu de la droite qui joint deux quelconques des huit points en question, attendu que ces points forment un système de Lamé ; on arrive ainsi a ce résultat :

Les points milieux des vingt huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient les arêtes du tétraèdre.

(BELTRAMI, *N. A.*, 1863, p. 336.)

Les pieds des perpendiculaires abaissées de l'un de ces points milieux sur les plans des faces du tétraèdre sont dans un même plan.

(A. SARTIAUX, *N. A.*, 1864, p. 367.)

Il va sans dire que l'idée de rattacher le théorème de Beltrami au théorème de Painvin n'est pas nouvelle. (*N. A.*, 1864, p. 225 et 1865, p. 74.)

2. Avant de démontrer géométriquement le théorème énoncé en dernier lieu, je rappelle que *les huit sphères* *tangentes aux plans des faces d'un tétraèdre forment deux systèmes bien distincts :* l'un des systèmes est formé de la sphère inscrite et des trois sphères inscrites dans les espaces nommés *combles* (nombre pair de plans bissecteurs extérieurs) ; l'autre système est formé des quatre autres sphères (nombre impair de plans bissecteurs extérieurs). Les centres des huit sphères forment ainsi deux tétraèdres

$$(I, I', I'', I''') \quad \text{et} \quad (I_1, I_2, I_3, I_4).$$

D'une part, chacune des *douze* arêtes de ces deux tétraèdres rencontre deux arêtes opposées du tétraèdre primitif ;

D'autre part, chacune des *seize* droites qui joignent l'un des points I, I', I'', I''' à l'un des points I_1, I_2, I_3, I_4 passe par un sommet du tétraèdre primitif.

On a bien ainsi vingt-huit droites.

Soient I et J les centres des deux sphères que l'on considère, et qui peuvent appartenir à des systèmes différents ou à un même système ; soit K le milieu de IJ. Introduisons les deux cônes, de sommets S et S', qui sont circonscrits à la fois aux deux sphères ; les plans des quatre faces du tétraèdre sont tangents à l'un ou à l'autre de ces deux cônes (soit qu'il y ait trois plans tangents à l'un des cônes et un plan tangent à l'autre, soit qu'il y ait deux plans tangents à l'un des cônes et deux plans tangents à l'autre). On doit prouver que les projections du point K, milieu de IJ, sur les plans tangents à l'un quelconque des deux cônes, sont dans un même plan ; or, si l'on coupe le système des deux sphères et des deux cônes par un plan contenant la droite IJ, le fait à établir se réduit au fait analogue de géométrie plane, et celui-ci résulte du théorème de Simpson. *Le plan qui contient les projections* *du point* K *est d'ailleurs perpendiculaire à la droite* IJ.

3. Relativement à ce dernier fait, qui ressort de la démonstration donnée, je ferai la remarque suivante. La surface du troisième ordre considérée ici est en même temps le lieu d'un point M dont le point inverse est rejeté à l'infini, c'est-à-dire que la droite inverse de la droite AM par rapport au trièdre A, et les trois droites analogues, sont parallèles; *le plan qui contient les projections du point* M *est perpendiculaire à la direction de ces droites.* (Cette remarque donne même une démonstration du fait qu'un point M dont les coordonnées vérifient l'équation de la surface à ses projections sur les plans des faces du tétraèdre situées dans un même plan.)

Dès lors, si l'on prend comme point M le milieu K du segment IJ, lorsque les centres I et J sont alignés avec le point A (sphères appartenant à des systèmes différents), la droite AIKJ est sa propre inverse par rapport au trièdre A, et le plan qui contient les projections du point K est perpendiculaire à cette droite.

4. *Si le tétraèdre est orthocentrique, son orthocentre étant* H, *le plan qui contient les projections du point* M *partage le segment* MH *dans le rapport de* 1 *à* 2. Cette propriété, que j'avais indiquée sous forme de question, a été établie par M. R. Bouvaist (*N. A.*, 1906, p. 479) de la manière suivante : Pour un tétraèdre quelconque, deux points inverses sont les foyers d'une quadrique de révolution inscrite, les projections des deux points sur les plans des faces étant sur une même sphère qui est la sphère principale de

la quadrique. La surface du troisième ordre considérée, surface inverse du plan de l'infini, est le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits au tétraèdre, les plans qui contiennent les projections des points de la surface sur les plans des faces du tétraèdre étant les plans tangents au sommet de ces paraboloïdes. Or on sait que le plan orthoptique d'un paraboloïde inscrit à un tétraèdre orthocentrique passe par l'orthocentre de ce tétraèdre (*voir*, par exemple, Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 118); la proposition énoncée résulte de là, la distance du sommet d'un paraboloïde elliptique au plan orthoptique étant $\frac{p+q}{2}$, ce qui donne p pour un paraboloïde de révolution.

Nous aurons l'occasion d'appliquer cette propriété au point K, milieu du segment IJ, les points I et J étant en ligne droite avec le point A (sphères appartenant à des systèmes différents); il serait intéressant d'en avoir une démonstration élémentaire.

DEUXIÈME PARTIE.

I. — Géométrie plane. Triangles.

5. Un cercle U et une conique V étant donnés, la condition d'existence de triangles inscrits à U et conjugués à V, ou de triangles circonscrits à V et conjugués à U, est que le cercle U soit orthogonal au cercle orthoptique de la conique V (Steiner et Faure). Considérons alors, pour un triangle ABC :

Le cercle circonscrit, de centre O et de rayon R,
Le cercle inscrit, de centre I et de rayon r,
Le cercle conjugué, de centre H et de rayon ρ,

ce dernier étant d'abord supposé réel ; en prenant pour U et V les cercles O et H, puis les cercles O et I, on peut dire :

Le cercle circonscrit à un triangle obtusangle est orthogonal au cercle orthoptique du cercle conjugué à ce triangle.

Le cercle conjugué à un triangle obtusangle est orthogonal au cercle orthoptique du cercle inscrit à ce triangle.

On a les formules

$$\overline{OH}^2 = R^2 + 2\rho^2,$$
$$\overline{HI}^2 = \rho^2 + 2r^2.$$

6. Les pieds des hauteurs étant P, Q, R, posons

$$(H) = \overline{HA} \times \overline{HP} = \overline{HB} \times \overline{HQ} = \overline{HC} \times \overline{HR}.$$

Dans le cas d'un triangle obtusangle on a $\rho^2 = (H)$. On peut donc écrire pour un triangle quelconque, en vertu du principe de continuité,

$$(1) \qquad \overline{OH} = R^2 + 2(H),$$
$$(2) \qquad \overline{IH}^2 = 2r^2 + (H).$$

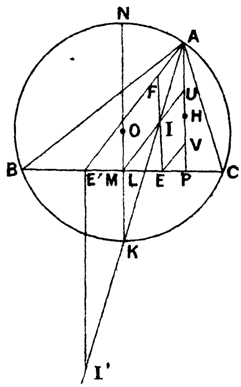
La formule (1) est facile à établir géométriquement : il suffit de considérer la puissance du point H par rapport au cercle circonscrit, cette puissance étant $\overline{HA} \times 2\overline{HP}$.

Pour démontrer géométriquement la formule (2), nous écrirons (*fig.* 1)

$$\begin{aligned}\overline{IH}^2 &= \overline{AI}^2 + \overline{AH}^2 - 2AH(AP - r)\\ &= \overline{AI}^2 - AH(AP - 2r) - AH.HP\\ &= \overline{AI}^2 - AH(AP - 2r) + (H).\end{aligned}$$

Or, le point A étant centre d'homothétie directe des cercles I et I′, on a sur la figure $EI = IF = r$, de sorte

Fig. 1.



que MI est parallèle à E′F ; on a donc, dans les triangles semblables AUI et KMI,

$$\frac{AI}{r} = \frac{KI}{KM},$$

d'où

$$\frac{\overline{AI}^2}{r^2} = \frac{KA.KI}{KM^2} = \frac{KM.KN}{KM^2} = \frac{KN}{KM}.$$

D'autre part, pour faire intervenir $AP - 2r$, menons EV parallèle à MU ; on a

$$\frac{PV}{EI} = \frac{EV \text{ ou } IU}{MI} = \frac{UA}{KM},$$

ou

$$\frac{AP - 2r}{r} = \frac{r}{KM}.$$

On a donc

$$\overline{IH}^2 = r^2 \frac{KN - AH}{KM} + (H)$$

ou, en remplaçant AH par 2OM,

$$\overline{IH}^2 = 2r^2 \frac{OK - OM}{KM} + (H) = 2r^2 + (H).$$

7. Si l'on élimine (H) entre les relations (1) et (2), on a

$$(3)\qquad \overline{OH}^2 - 2\overline{IH}^2 = R^2 - 4r^2:$$

or, le cercle des neuf points ayant son centre Ω au milieu de OH, le théorème de la médiane donne, dans le triangle IOH,

$$\overline{IO}^2 + \overline{IH}^2 = 2\overline{I\Omega}^2 + \frac{OH^2}{2},$$

et la relation précédente donne

$$2\overline{IO}^2 - 4\overline{I\Omega}^2 = R^2 - 4r^2;$$

en tenant compte de la formule d'Euler,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr,$$

on a donc

$$(R - 2r)^2 = 4\overline{\Omega I}^2,$$

ou, à cause de $R > 2r$,

$$\Omega I = \frac{R}{2} - r;$$

on vérifie ainsi le théorème de Feuerbach.

Si l'on considère les triangles inscrits à un cercle O et circonscrits à un cercle I, le lieu des centres Ω des cercles des neuf points de ces triangles est un cercle de centre I; le lieu des orthocentres est un cercle ayant son centre sur la droite OI, comme on le voit directement par la formule (3); le lieu des centres de gravité est de même un cercle ayant son centre sur la droite OI.

8. Les formules (1) et (2), avec leurs conséquences, restent applicables en remplaçant le cercle inscrit par un cercle exinscrit. La démonstration du n° 6 subirait seulement de légères modifications, et, au n° 7,

r serait changé en $-r$. Le fait suivant, qui est un fait d'inégalité, concerne seulement le cercle inscrit.

Le centre du cercle INSCRIT *à un triangle est intérieur au cercle décrit sur* GH *comme diamètre, ou encore l'angle* $\widehat{\mathrm{GIH}}$ *est obtus.*

On a en effet

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = 2\mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{R}}{2} - r\right), \qquad \overline{\Omega\mathrm{I}}^2 = \left(\frac{\mathrm{R}}{2} - r\right)^2,$$

et par suite (en écartant le cas du triangle équilatéral)

$$\frac{\overline{\mathrm{OI}}^2}{\overline{\Omega\mathrm{I}}^2} = \frac{2\mathrm{R}}{\frac{\mathrm{R}}{2} - r} > 4, \qquad \frac{\mathrm{OI}}{\Omega\mathrm{I}} > 2;$$

comme les points G et H divisent le segment $\mathrm{O}\Omega$ dans le rapport de 2 à 1, le lieu des points pour lesquels on a $\frac{\mathrm{OM}}{\Omega\mathrm{M}} = 2$ est le cercle décrit sur GH comme diamètre; donc le point I est intérieur à ce cercle.

(Le cercle décrit sur GH comme diamètre est connu dans la théorie du triangle; il fait partie du même faisceau que le cercle circonscrit, le cercle des neuf points, le cercle conjugué. On le rencontre dans l'étude du tétraèdre orthocentrique, à propos de la deuxième sphère des douze points : cette sphère contient, pour chaque face, le cercle qui a pour diamètre la droite joignant le centre de gravité de cette face à son orthocentre.)

II. — Géométrie dans l'espace. Tétraèdres orthocentriques.

9. L'extension à l'espace du théorème de Steiner et Faure donne pour un tétraèdre orthocentrique ABCD

les résultats suivants. Les pieds des hauteurs étant P, Q, R, S, si l'on pose

$$(\mathrm{H}) = \overline{\mathrm{HA}} \times \overline{\mathrm{HP}} = \overline{\mathrm{HB}} \times \overline{\mathrm{HQ}} = \ldots = \ldots,$$

on a

$$(1) \qquad \overline{\mathrm{OH}}^2 = \mathrm{R}^2 + 3(\mathrm{H}),$$

$$(2) \qquad \overline{\mathrm{IH}}^2 = 3r^2 + (\mathrm{H}).$$

La formule (1) est facile à établir géométriquement; il suffit de considérer la puissance du point H par rapport à la sphère circonscrite, cette puissance étant $\overline{\mathrm{HA}} \times 3\overline{\mathrm{HP}}$: la sphère circonscrite est en effet directement homotétique à la seconde sphère des douze points (sphère PQRS), le centre d'homothétie étant H et le rapport d'homothétie étant 3.

Pour démontrer géométriquement la formule (2), nous emploierons la figure 2 dans laquelle le point K est, par construction, le milieu de II', et la droite AN est, par construction, perpendiculaire à la droite AK; la droite MT est aussi perpendiculaire à la droite AK, et l'on a (*voir* plus loin) HT = 2KM.

On a d'abord, comme au n° 6, K étant le milieu de II' et l'angle KAN étant droit par construction,

$$\overline{\mathrm{IH}}^2 = r^2 \frac{\mathrm{KN} - \mathrm{AH}}{\mathrm{KM}} + (\mathrm{H});$$

pour achever le calcul, nous menons la droite MT perpendiculaire à la droite AK, et nous écrivons

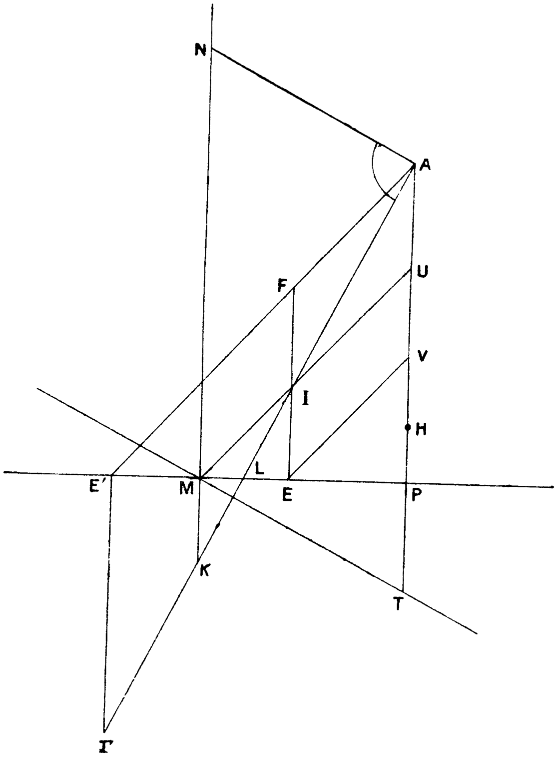
$$\frac{\mathrm{KN} - \mathrm{AH}}{\mathrm{KM}} = \frac{\mathrm{KM} + \mathrm{HT}}{\mathrm{KM}};$$

la formule (2) sera établie si l'on prouve qu'on a

$$\mathrm{HT} = 2\mathrm{KM}.$$

Or cela résulte de ce qu'on a vu au n° 4, la droite MT étant la trace sur le plan de la figure du plan qui con-

Fig. 2.



tient les projections du point K sur les plans des faces du tétraèdre.

10. Si l'on élimine (H) entre les relations (1) et (2), on a

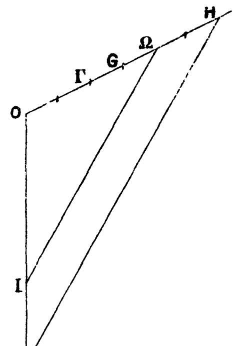
$$(3) \qquad \overline{OH}^2 - 3\,\overline{IH}^2 = R^2 - 9r^2;$$

mais on n'a plus ici l'analogue de la formule de géométrie plane, $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$, et, par exemple, la seconde sphère des douze points, dont le centre Ω est au tiers du segment HO et dont le rayon est $\frac{R}{3}$, n'est pas tangente à la sphère inscrite : ce contact exigerait, comme on le verra plus loin, la condition

$$\overline{OI}^2 = (R - 3r)(R + r).$$

On peut toutefois déduire de la formule (3) des conséquences intéressantes. Étant données deux sphères (O, R) et (I, r), dont la seconde est supposée intérieure à la première, il existe une double infinité de tétraèdres orthocentriques inscrits à la première et circonscrits à la seconde. D'après la relation (3), le lieu de l'orthocentre H est une sphère ayant pour centre un point O' situé sur le prolongement de OI (*fig.* 3)

Fig. 3.



et tel que l'on ait $\frac{O'I}{O'O} = \frac{1}{3}$. Si l'on considère la deuxième sphère des douze points du tétraèdre, celle qui passe par les centres de gravité des faces, par les pieds des hauteurs du tétraèdre, etc., le centre Ω de cette sphère est situé au tiers de HO, et l'on arrive à ce résultat :

Étant données deux sphères (O, R) *et* (I, r), *dont la seconde est supposée intérieure à la première, il existe une double infinité de tétraèdres orthocentriques inscrits à la première et circonscrits à la seconde ; le lieu des centres* Ω *des deuxièmes sphères des douze points de ces tétraèdres est une sphère concentrique à la sphère inscrite* (I, r). Ces sphères des douze points ont d'ailleurs même rayon $\frac{R}{3}$.

On a marqué sur la figure 3, outre les points O, H, Ω, le centre de gravité G du tétraèdre et le point de concours Γ des perpendiculaires aux faces menées par leurs centres de gravité : dans les conditions qui viennent d'être indiquées, chacun des quatre points H, Ω, G, Γ se déplace sur une sphère ayant naturellement son centre sur la droite OI.

[Par analogie avec un théorème de géométrie plane dû à Burnside, on peut démontrer que le lieu de l'orthocentre d'un tétraèdre orthocentrique, inscrit à une quadrique S' et circonscrit à une quadrique S, est une quadrique passant par la courbe d'intersection de la quadrique S' avec la sphère orthoptique de la quadrique S ; si la quadrique S' est une sphère, le lieu est donc une sphère.]

11. Pour voir directement que le lieu du point Ω est une sphère de centre I, et pour calculer en même temps le rayon de cette sphère, il suffit, en imitant ce qui a été fait au n° 7, d'appliquer le théorème de Stewart aux trois obliques IO, IH, $I\Omega$; on a ainsi

$$\overline{IO}^2 + 2\overline{IH}^2 - 3\overline{I\Omega}^2 = \frac{2}{3}\overline{OH}^2,$$

et la relation (3) donne

$$(4)\qquad \overline{\mathrm{IO}}^2 - 3\overline{\mathrm{I}\Omega}^2 = \frac{2}{3}(\mathrm{R}^2 - 9r^2);$$

si l'on donne OI, R et r, la distance IΩ est constante.

Les sphères Ω sont égales et ont leurs centres à une même distance du point I : on peut se demander à quelle condition elles seront tangentes à la sphère (I, r). comme cela a lieu sans condition en géométrie plane (théorème de Feuerbach). En remplaçant ΩI par $\frac{\mathrm{R}}{3} \mp r$, afin d'embrasser le cas d'une sphère exinscrite, *on obtient la condition*

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = (\mathrm{R} \mp 3r)(\mathrm{R} \pm r).$$

Pour obtenir deux sphères qui satisfassent à l'une de ces égalités, on peut partir d'une pyramide triangulaire régulière (deux paramètres), et prendre comme sphère O la sphère circonscrite, comme sphere I la sphère inscrite, ou la sphère exinscrite qui touche la base en son centre. Les deux sphères O et I étant ainsi choisies, tout tétraèdre orthocentrique inscrit à la première et circonscrit à la seconde a sa seconde sphère des douze points tangente à la sphère I; deux de ces tétraèdres (celui duquel on part et un autre) sont des pyramides triangulaires régulières.

[La condition ci-dessus est indiquée à tort comme condition d'existence de tétraèdres inscrits à une sphère O et circonscrits à une sphère I, dans les *Annales de Gergonne* (t. XIV, p. 56); l'auteur suppose qu'il existe nécessairement, parmi ces tétraèdres, des pyramides triangulaires régulières, ce qui est évidemment inexact. Painvin, dans son *Traité de Géométrie analytique*, propose comme exercice la démonstration de cette formule, qu'il emprunte aux *Annales de Ger-*

gonne (p. 212, exercices **18** et **19**). L'idée fausse que deux quadriques n'admettent de tétraèdres inscrits à l'une et circonscrits à l'autre que sous une condition invariante a d'ailleurs été reproduite depuis.]

Inégalités relatives au tétraèdre orthocentrique.

12. Les formules (1) et (2), avec leurs conséquences, restent applicables en remplaçant la sphère inscrite par une sphère exinscrite. Dans ce qui suit, il faut distinguer.

En appelant I le centre d'une sphère inscrite ou exinscrite, on a, par la formule (4),

$$\overline{I\Omega}^2 = \frac{\overline{IO}^2}{3} - \frac{2}{9}(R^2 - 9r^2).$$

1° (*a*). La sphère Ω enveloppera la sphère I si l'on a

$$\overline{I\Omega}^2 < \left(\frac{R}{3} - r\right)^2,$$

ou

$$\frac{\overline{IO}^2}{3} < \frac{2}{9}(R^2 - 9r^2) + \frac{1}{9}(R - 3r)^2,$$

ou

$$\frac{\overline{IO}^2}{3} < \frac{1}{9}(R - 3r)(3R + 3r),$$

ou enfin

$$\overline{IO}^2 < (R - 3r)(R - r). \tag{5}$$

L'inégalité écrite tout d'abord exprime seulement que les sphères Ω et I sont l'une intérieure à l'autre; d'après (5) on a $\frac{R}{3} > r$, et c'est bien la sphère Ω qui enveloppe la sphère I.

1° (*b*). Les deux sphères seront extérieures l'une à l'autre si l'on a

$$(6) \qquad \overline{\mathrm{IO}}^2 > (\mathrm{R}+3r)(\mathrm{R}-r).$$

2° Enfin les deux sphères seront sécantes si l'on a

$$(7) \qquad (\mathrm{R}-3r)(\mathrm{R}+r) < \overline{\mathrm{IO}}^2 < (\mathrm{R}+3r)(\mathrm{R}-r).$$

Ces conditions permettent d'établir le théorème suivant :

Dans un tétraèdre orthocentrique SABC *qui a un trièdre trirectangle* (*une condition*) :

1° (*a*). *La deuxième sphère des douze points enveloppe la sphère inscrite* [condition (5)];

1° (*b*). *Elle est extérieure à chacune des trois sphères exinscrites situées dans les combles* SA *ou* BC, SB *ou* CA, SC *ou* AB [condition (6)];

2° *Elle coupe les quatre sphères exinscrites situées dans les trièdres* S, A, B, C [condition (7)].

On remarquera que la première sphère des douze points n'a aucun point commun avec les quatre sphères du groupe formé par la sphère inscrite et les sphères exinscrites dans les combles, tandis qu'elle coupe les quatre sphères de l'autre groupe.

(Je pense qu'il en est de même pour un tétraèdre orthocentrique quelconque, mais je n'ai pas réussi à établir la démonstration. On trouvera plus loin une Note à ce sujet.)

13. Le trièdre S étant trirectangle, prenons comme axes de coordonnées les droites SA, SB, SC, et soit

$$\mathrm{SA} = a, \qquad \mathrm{SB} = b, \qquad \mathrm{SC} = c.$$

Les coordonnées du point O sont

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{b}{2}, \quad \frac{c}{2},$$

et l'on a

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

1° (a). S'il s'agit de la sphère inscrite, les coordonnées du point I sont égales au rayon r, et l'on doit avoir, d'après (5),

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - r\right)^2 + \ldots \leqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - 2Rr - 3r^2,$$

ou, en divisant par r,

$$(\alpha) \qquad 2R + 6r \leqq a + b + c;$$

on a d'ailleurs

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{abc}{bc + ca + ab + \sqrt{b^2c^2 + \ldots}} \\ &= \frac{bc + ca + ab - \sqrt{b^2c^2 + \ldots}}{2(a + b + c)}. \end{aligned} \right.$$

1° (b). Pour une sphère exinscrite située dans e comble AB, les coordonnées du centre I sont r, r, $-r$, et l'on doit avoir, d'après (6),

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + r\right)^2$$
$$\geqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + 2Rr - 3r^2;$$

cette condition se déduit de celle du cas précédent en changeant r en $-r$, a en $-a$, b en $-b$, et en changeant le sens de l'inégalité; en divisant donc ici par $-r$, on obtient

$$(\alpha_1) \qquad 2R + 6r' \leqq a' + b' + c,$$

r' représentant $-r$, etc. On a d'ailleurs

$$r = \frac{abc}{ca + cb - ab - \sqrt{b^2c^2 + \ldots}}$$

ou

$$(\beta_1) \qquad r' = \frac{a'bc}{ca' + cb + a'b' - \sqrt{c^2a'^2 + \ldots}};$$

cette formule est celle du cas précédent, où l'on remplace également r, a, b par $-r$, $-a$, $-b$ ou r', a', b'. Il faut d'ailleurs observer ceci : d'après la formule (β_1), r' étant négatif, l'expression $ca' + cb' + a'b'$ est négative; comme on a aussi

$$r' = \frac{ca' + cb' + a'b - \sqrt{c^2a'^2 + \ldots}}{2(a + b - c)},$$

la quantité $a' + b' + c$ *est positive.*

Si la sphère est dans le comble SC, les coordonnées du centre sont $-r$, $-r$, r, et l'on doit avoir

$$\left(\frac{a}{2} + r\right)^2 + \left(\frac{b}{2} + r\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - r\right)^2$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - 2Rr - 3r^2,$$

avec

$$r = \frac{-abc}{ca + cb - ab - \sqrt{b^2c^2 + \ldots}};$$

il faut donc, dans ce qu'on vient de dire, changer a en $-a$, b en $-b$, c en $-c$, et écrire

$$(\alpha_2) \qquad 2R + 6r \leq a + b + c'.$$

$$(\beta_2) \qquad r' = \frac{abc'}{c'a + c'b + ab - \sqrt{c'^2a^2 + \ldots}}.$$

La quantité $a + b + c'$ *est d'ailleurs positive.* En effet, si l'expression $c'a + c'b + ab$ est négative, comme on a aussi

$$r' = \frac{c'a + c'b + ab - \sqrt{c'^2a^2 + \ldots}}{2(a + b + c')},$$

le fait annoncé est exact. Si l'on a

$$c'a + c'b + ab > 0 \qquad \text{ou} \qquad c' > \frac{-ab}{a+b},$$

on a

$$a + b + c' > a + b - \frac{ab}{a+b} > 0.$$

2° Pour la sphère exinscrite située dans le trièdre S, les coordonnées du centre sont r, r, r, et l'on doit avoir d'une part

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \ldots \geqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - 2Rr - 3r^2,$$

ou, en divisant par r,

$$(\gamma) \qquad 2R + 6r \geqq a + b + c,$$

avec

$$(\delta) \qquad \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{abc}{bc + ca + ab - \sqrt{b^2c^2 + \ldots}} \\ &= \frac{bc + ca + ab + \sqrt{b^2c^2 + \ldots}}{2(a + b + c)}. \end{aligned} \right.$$

On doit avoir d'autre part

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \ldots \quad \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + 2Rr - 3r^2;$$

cette condition se déduit de (γ) en changeant r, a, b, c en $-r$, $-a$, $\ldots$, et en changeant le sens de l'inégalité; en divisant donc ici par $-r$, on obtient

$$(\gamma_1) \qquad 2R + 6r' \geqq a' + b' + c';$$

on peut d'ailleurs écrire

$$(\delta_1) \qquad r' = \frac{b'c' + c'a' + a'b' + \sqrt{b'^2c'^2 + \ldots}}{2(a' + b' + c')}.$$

Pour une sphère exinscrite située dans le trièdre C, les coordonnées du point I sont r, r, $-r$, et l'on doit avoir

$$\left(\frac{a}{2}-r\right)^2+\left(\frac{b}{2}-r\right)^2+\left(\frac{c}{2}+r\right)^2 \overline{\gtrless} \frac{a^2+b^2+c^2}{4}-2\mathrm{R}r-3r^2$$

$$\left(\frac{a}{2}-r\right)^2+\left(\frac{b}{2}-r\right)^2+\left(\frac{c}{2}+r\right)^2 \leqq \frac{a^2+b^2+c^2}{4}+2\mathrm{R}r-3r^2$$

$$r=\frac{abc}{bc+ca-ab+\sqrt{b^2c^2+\ldots}};$$

ces inégalités et cette formule ne diffèrent de celles du cas précédent que par le changement de c en $-c$; on aura donc l'écriture (γ, δ) ou l'écriture (γ_1, δ_1), avec c' au lieu de c ou c au lieu de c'.

14. Il suffira de vérifier que l'inégalité (α), avec la valeur (β) de r, et l'inégalité (γ), avec la valeur (δ) de r, sont exactes quels que soient les signes des quantités a, b, c, sauf toutefois l'hypothèse $a+b+c>0$ pour l'inégalité (α).

Considérons a, b, c comme les racines de l'équation

$$x^3-px^2+qx-r=0.$$

On doit avoir d'abord

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{3(bc+ca+ab-\sqrt{b^2c^2+\ldots})}{a+b+c} \leqq a+b+c$$

ou, en multipliant par $a+b+c$ qui est supposé positif pour cette inégalité,

$$p\sqrt{p^2-2q}-3\sqrt{q^2-2pr} \leqq p^2-3q.$$

Le second membre étant positif, si le premier est négatif, l'inégalité a lieu; sinon on doit avoir, par élévation au carré et en divisant par p,

$$(\varepsilon) \qquad 2pq-9r \leqq 3\sqrt{(p^2-q)(q^2-2pr)}.$$

Avant d'aller plus loin, considérons de même l'inégalité (γ), pour laquelle on n'a plus l'hypothèse $p > 0$. Cette inégalité ne diffère primitivement de l'autre que par le changement du signe devant le radical qui entre dans l'expression du rayon r, et par le sens. *Si p est positif*, on doit donc avoir

$$p\sqrt{p^2 - 2q} + 3\sqrt{q^2 - 2pr} \geqq p^2 - 2q\,;$$

on peut élever au carré, diviser par p, et l'on a, d'après le calcul relatif à (ε),

$$2pq - 9r \geqq -3\sqrt{(p^2 - 2q)(q^2 - 2pr)}$$

ou

$$(\varepsilon_1) \qquad 9r - 2pq \leqq 3\sqrt{(p^2 - 2q)(q^2 - 2pr)}.$$

Si p est négatif, la multiplication par p change le sens de l'inégalité, ce qui donne

$$p\sqrt{p^2 - 2q} + 3\sqrt{q^2 - 2pr} \leqq p^2 - 2q\,;$$

si le premier membre est négatif, l'inégalité a lieu; sinon on peut élever au carré et diviser par p en changeant le sens de l'inégalité; on a, d'après le calcul relatif à (ε),

$$2pq - 9r \geqq -3\sqrt{(p^2 - 2q)\ldots}\,;$$

c'est l'inégalité (ε_1).

15. Considérons les inégalités (ε) et (ε_1). Si le premier membre de l'une de ces inégalités est négatif, dans les conditions où l'on doit l'appliquer, elle est exacte. Il suffira donc de vérifier qu'on a toujours

$$(2pq - 9r)^2 \leqq 9(p^2 - 2q)(q^2 - 2pr).$$

Or, les racines de l'équation du troisième degré que l'on considère étant réelles, on a l'inégalité identique en a, b, c,

$$(pq - 9r)^2 \leqq 4(p^2 - 3q)(q^2 - 3pr);$$

cela conduit à mettre l'inégalité à établir sous la forme

$$(pq - 9r)^2 \leqq 6(p^2 - 3q)(q^2 - 3pr),$$

et l'on voit ainsi que cette inégalité en a, b, c est identique *a fortiori*.

Le cas limite n'est atteint ici que dans l'hypothèse $a = b = c$; en effet, la quantité $(pq - 9r)^2$, étant inférieure ou au plus égale à $4AB$, ne peut atteindre la valeur $6AB$ que dans l'hypothèse $AB = 0$; on a alors

$$pq - 9r = 0, \quad \ldots.$$

16. *Dans un tétraèdre orthocentrique, le centre le la sphère* INSCRITE *est-il intérieur à la sphère décrite sur* GH *comme diamètre, ou encore l'angle* GIH *est-il obtus?*

Comme les points G et H divisent le segment $O\Omega$ dans le rapport de 3 à 1, la sphère décrite sur GH comme diamètre est le lieu des points pour lesquels on a

$$\frac{OM}{\Omega M} = 3;$$

la propriété énoncée aura donc lieu si l'on a

$$\frac{IO}{I\Omega} > 3.$$

Or, la formule (4) donne

$$(8) \qquad \overline{IO}^2 - 9\overline{I\Omega}^2 = 2(R^2 - 9r^2 - \overline{OI}^2);$$

on doit donc avoir

$$(9) \qquad \overline{OI}^2 < R^2 - 9r^2;$$

si l'inégalité (5) est exacte (il s'agit ici de la sphère inscrite), celle-ci l'est *a fortiori*.

17. L'une ou l'autre des égalités

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = (\mathrm{R} \mp 3r)(\mathrm{R} \pm r)$$

a lieu dans des conditions qui ont été indiquées au n° **11**; avec les signes supérieurs, la seconde sphère des douze points est tangente à la sphère inscrite, qu'elle enveloppe; avec les signes inférieurs, elle est tangente extérieurement à une sphère exinscrite dans l'un des trièdres du tétraèdre.

Pour la sphère *inscrite*, la quantité $\overline{\mathrm{OI}}^2$ ne peut atteindre la limite $\mathrm{R}^2 - 9r^2$ que si la limite

$$(\mathrm{R} - 3r)(\mathrm{R} + r)$$

s'élève à la valeur $\mathrm{R}^2 - 9r^2$, ce qui exige

$$\mathrm{R} = 3r \quad \text{ou} \quad r = 0.$$

Si l'on écarte la seconde hypothèse, on doit avoir

$$\mathrm{R} = 3r,$$

ce qui exige

$$\mathrm{OI} = 0,$$

et le point I est en O; on a alors

$$\Omega\mathrm{I} = 0,$$

de sorte que Ω est en O, ou encore H est en O, ainsi que G et Γ : les centres de gravité des faces du tétraèdre coïncidant avec les centres des cercles circonscrits, ces faces sont des triangles équilatéraux, et l'on a affaire à un tétraèdre régulier. On indiquera au n° **21** des tétraèdres évanouissants ($r = 0$) pour lesquels l'angle GIH est droit.

Note. — Si la seconde sphère des douze points enveloppe réellement la sphère *inscrite,* le point de contact t de celle-ci avec le plan ABC, par exemple, doit être intérieur au cercle suivant lequel cette sphère des douze points coupe le plan ABC, c'est-à-dire au cercle décrit sur gh comme diamètre, h étant l'orthocentre du triangle ABC, g étant le centre de gravité. Si l'on se donne le triangle ABC, le cercle en question est déterminé et le point t doit être à l'intérieur de ce cercle, quelle que soit la hauteur hD du tétraèdre.

Or, si l'on donne la base ABC d'un tétraèdre ABCD, et le pied h de la hauteur, sans supposer que le tétraèdre est orthocentrique, quel est le lieu des points de contact avec le plan ABC des huit sphères tangentes aux faces du tétraèdre? Si I est, par exemple, le centre de la sphère inscrite, la droite DI contient encore le centre I′ d'une sphère tangente aux quatre faces; les points de contact t et t' avec le plan ABC sont en ligne droite avec h; les coordonnées du point t, rapporté au triangle ABC, sont

$$r\cot\frac{\alpha}{2},\quad r\cot\frac{\beta}{2},\quad r\cot\frac{\gamma}{2},$$

α, β, γ étant les dièdres suivant BC, CA, AB, et les coordonnées du point t' sont

$$r'\,\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2},\quad r'\,\mathrm{tang}\frac{\beta}{2},\quad r'\,\mathrm{tang}\frac{\gamma}{2},$$

de sorte que ces deux points sont inverses par rapport au triangle ABC. *Le lieu des points de contact t est donc le lieu des points qui sont alignés avec leur inverse sur le point h.* C'est une courbe du troisième ordre, passant en h, et toute sécante menée par h la coupe en deux points inverses : elle passe aux points A, B, C et par les points α, β, γ, où les droites Ah, Bh, Ch percent les côtés opposés; elle passe par les centres i, i', i'', i''' des cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC, et les tangentes en ces points passent en h; elle passe en h, comme on l'a dit, et aussi par le point inverse o, la tangente en h passant par ce point inverse; l'équation de la courbe montre que les tangentes aux points A, B, C passent aussi par ce point inverse.

Lorsqu'il s'agit de tétraèdres orthocentriques, h est l'orthocentre du triangle ABC, les points α, β, γ sont les pieds des hauteurs, le point o est le centre du cercle circonscrit au triangle. Si les angles A, B, C sont aigus ([1]), la partie du lieu qui est relative à la sphère *inscrite* est un arc de courbe qui va de h en i, la tangente en h passant au centre o du cercle circonscrit, la tangente en i passant en h; on voit (n° 8) que le point i est intérieur au cercle décrit sur gh comme diamètre, et, dans diverses constructions graphiques que j'ai effectuées par la méthode de M. Hermary, j'ai toujours trouvé que l'arc de courbe en question est intérieur à ce cercle. Si l'angle A est obtus ([2]), la partie du lieu qui est relative à la sphère inscrite est un arc de courbe qui va de A en i, la tangente en A passant en o, la tangente en i passant en h; j'ai obtenu le même résultat que dans l'autre cas.

[On construit facilement les points t, d'après la méthode de M. Hermary, en prenant sur les hauteurs du triangle ABC (je suppose le tétraèdre orthocentrique)

---

[1]) Le plus petit angle du triangle étant C, la courbe se compose d'une branche infinie C$oih\gamma i'''$ et de deux branches hyperboliques $i'\alpha$B, $i''\beta$A.

([2]) Le plus petit angle du triangle étant encore C, la courbe se compose d'une branche infinie $i'o$C$i''\gamma h$, et d'un ovale A$i\alpha$B$i'''\beta$.

trois points D_1, D_2, D_3 tels qu'on ait

$$AD_2 = AD_3, \qquad BD_3 = BD_1, \qquad \text{d'où} \qquad CD_1 = CD_2,$$

ce qui laisse un de ces points arbitraires, et en prenant le centre du cercle $D_1D_2D_3$. J'observe en passant ceci. La figure $ABCD_1D_2D_3$ dépend de quatre paramètres au point de vue de la grandeur. Si l'on se donne le triangle $D_1D_2D_3$, il existe donc un lieu du point h tel que, A, B, C étant les intersections des droites hD_1, hD_2, hD_3 avec les perpendiculaires menées aux côtés du triangle $D_1D_2D_3$ en leurs milieux, le point h soit l'orthocentre du triangle ABC; en prenant comme triangle de référence le triangle $D_1D_2D_3$, on trouve qu'un tel point h et son inverse par rapport à ce triangle sont alignés avec l'orthocentre du triangle. Le point h est donc le point de contact avec le plan ABC d'une sphère tangente aux quatre faces d'un certain tétraèdre orthocentrique ayant pour base le triangle $D_1D_2D_3$.]

TROISIÈME PARTIE.

Transformation de l'inégalité $\overline{OI}^2 \leqq (R - 3r)(R + r)$.

18. Je me bornerai dans ce paragraphe à ce qui concerne la sphère *inscrite*.

Les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre quelconque étant affectés des coefficients $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, ..., le barycentre est le centre I de la sphère inscrite, avec le coefficient $\frac{1}{r}$; on a donc, pour tout point M,

$$\sum \frac{\overline{MA}^2}{h_1} = \frac{\overline{MI}^2}{r} + C,$$

C étant une constante. Si l'on met le point M en O, on a

$$\frac{R^2}{r} = \frac{\overline{OI}^2}{r} + C,$$

ou

$$R^2 - \overline{OI}^2 = C \times r,$$

r étant un facteur.

19. Si le tétraèdre est orthocentrique, la constante C de la formule générale donnée d'abord peut être déterminée en mettant le point M en H. En remplaçant $\overline{IH}^2$ par $3r^2 + (H)$, on a

$$\begin{aligned} C &= \frac{\overline{HA}^2}{h_1} + \ldots - \frac{(H)}{r} - 3r \\ &= \frac{\overline{HA}^2}{h_1} + \ldots - \frac{(H)}{h_1} - \ldots - 3r \\ &= \frac{\overline{HA}^2 + \overline{HA} \times \overline{PH}}{h_1} - \ldots - 3r \\ &= \sum \overline{HA} - 3r, \end{aligned}$$

$\overline{HA}$ étant positif dans le sens PA.

La formule relative à $R^2 - \overline{OI}^2$ prend donc, *pour un tétraèdre orthocentrique,* la forme intéressante

$$(1) \qquad R^2 - \overline{OI}^2 = r \times \left(\sum \overline{HA} - 3r \right).$$

Au moyen de cette relation, l'inégalité (5) du n° **12**, à savoir

$$\overline{OI}^2 \leqq R^2 - 2Rr - 3r^2,$$

équivaut à la suivante :

$$2R + 3r \leqq \sum \overline{HA} - 3r$$

ou

$$(2) \qquad 2R + 6r \leqq \sum \overline{HA}.$$

C'est ainsi que, au n° **13**, avec un tétraèdre ayant un trièdre trirectangle, on a obtenu (après avoir, comme ici, divisé par r)

$$2R + 6r \leqq a + b + c;$$

le second membre n'a alors que trois termes, au lieu de quatre.

20. La formule (8) du n° **16** devient, en vertu de (1),

$$(3) \qquad \overline{IO}^2 - 9\overline{I\Omega}^2 = 2r\left(\sum \overline{HA} - 12r\right);$$

l'inégalité $\frac{IO}{I\Omega} > 3$, indiquée au n° **16**, équivaut donc à celle-ci :

$$(4) \qquad 12r \leqq \sum \overline{HA},$$

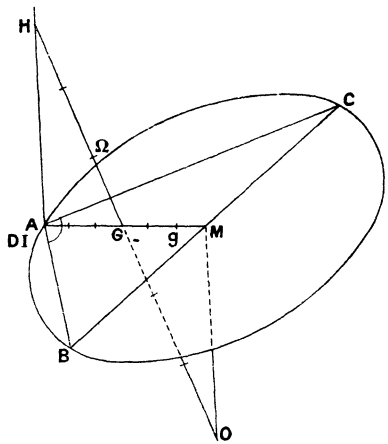
qui rentre d'ailleurs dans l'inégalité (2), si l'on a $R \geqq 3r$, comme on l'a dit au n° **12**.

21. La présence du facteur r dans les expressions des quantités

$$R^2 - \overline{OI}^2 \quad \text{et} \quad \overline{IO}^2 - 9\overline{I\Omega}^2$$

s'explique aisément. Si, dans un tétraèdre orthocentrique, la face ABC ayant en A un angle qui diffère infiniment peu d'un angle droit (*fig.* 4), l'arête AD est infiniment petite, dans une direction qui est d'ailleurs simplement orthogonale à BC, le centre I de la sphère inscrite est infiniment voisin des points A et D, de sorte que la quantité $R^2 - \overline{OI}^2$ est infiniment petite, en même temps que r est infiniment petit, le facteur $\sum \overline{\mathrm{HA}} - 3r$ restant fini. Le centre O de la sphère circonscrite est alors sur la perpendiculaire au plan ABC menée par le milieu M de BC, et les

Fig. 4.



points H et O sont symétriques par rapport au point G milieu de AM; le point I étant en A, l'angle GIH est droit, le point I est sur la sphère de diamètre GH; on a

$$\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{I}\Omega} = 3;$$

on vérifie aisément cette dernière égalité : en appelant g le centre de gravité du triangle ABC, situé au tiers de MA, on a

$$\mathrm{IO} = 3g\Omega = 3\mathrm{I}\Omega.$$

La formule (8), dans laquelle on fait $r = 0$, $\mathrm{R} = \mathrm{OI}$, donne naturellement

$$\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{I}\Omega} = 3.$$

Si l'on donne, dans un tétraèdre orthocentrique, les points O, H, I, ce tétraèdre dépend d'un paramètre. Supposons que le point I soit donné sur la sphère de diamètre GH, de sorte qu'on ait

$$\widehat{GIH} = 1^d.$$

On aura, avec un paramètre, des tétraèdres évanouissants (*fig.* 4) ayant deux sommets A et D confondus en I : les faces ABC seront dans le plan mené par D perpendiculairement à DH, et ces faces seront des triangles, rectangles en A, et inscrits au cercle de centre M qui passe en A; pour chaque position de l'hypoténuse BC, la direction AD sera la direction orthogonale à BC dans le plan tangent en A à la sphère de centre O qui passe en A.

Note. — La première sphère des douze points d'un tétraèdre orthocentrique, celle qui passe par les milieux des arêtes et par les pieds des perpendiculaires communes aux arêtes, est bien moins intéressante que la seconde sphère des douze points, dont les centres d'homothétie avec la sphère circonscrite sont les points H et G. Voici toutefois un fait intéressant. La quantité désignée par (H) est la puissance du point H par rapport à la première sphère des douze points : on le voit en évaluant cette puissance suivant la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées du tétraèdre. Il suit de là que *la sphère conjuguée à un tétraèdre orthocentrique est orthogonale à la première sphère des douze points de ce tétraèdre.* Cette sphère conjuguée a, en effet, pour centre le point H, et, si ρ est son rayon, on a

$$\rho^2 = (H) = \text{puissance de H}\ldots.$$