G. FONTENÉ

Contribution à la théorie du tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 555-571

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__555_1>

[$K^1 13c\alpha$]

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. G. FONTENÉ.

THÉORÈME. — *Le contact de la deuxième sphère des douze points d'un tétraèdre orthocentrique avec une sphère inscrite ou exinscrite est une condition simple qui se traduit par une condition double dans le cas d'un tétraèdre réel : le tétraèdre doit être une pyramide triangulaire régulière.*

Dans la première partie de ce Mémoire, j'établirai des formules relatives à un tétraèdre orthocentrique quelconque; dans la seconde partie, je démontrerai le théorème énoncé (*cf.* même Volume, p. 72).

I.

1. Soit un tétraèdre orthocentrique ABCD. Considérons une sphère tangente aux plans des quatre faces; le centre de cette sphère étant I, les points de contact avec les plans des faces étant K, L, M, N, prenons comme sens positifs sur les perpendiculaires à ces plans les sens KI, LI, MI, NI, ou les sens contraires, et soit

$$r = \overline{\mathrm{KI}} = \overline{\mathrm{LI}} = \overline{\mathrm{MI}} = \overline{\mathrm{NI}}.$$

Les pieds des hauteurs étant P, Q, R, S, soit

$$h = \overline{\mathrm{PA}}, \qquad h' = \overline{\mathrm{QB}}, \qquad h'' = \overline{\mathrm{RC}}, \qquad h''' = \overline{\mathrm{SD}}.$$

Prenons comme données les quantités

$$\overline{\mathrm{HA}} = a, \qquad \overline{\mathrm{HB}} = b, \qquad \overline{\mathrm{HC}} = c, \qquad \overline{\mathrm{HD}} = d.$$

2. On obtient facilement le rayon R de la sphère circonscrite. Si G est le barycentre des quatre sommets affectés de coefficients égaux, on a

$$\overline{\mathrm{HA}}^2 + \overline{\mathrm{HB}}^2 + \ldots = 4\,\overline{\mathrm{HG}}^2 + \lambda^2,$$
$$\overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 + \ldots = 4\,\overline{\mathrm{OG}}^2 + \lambda^2;$$

G étant milieu de OH, on a HG = OG, d'où

$$(1) \qquad 4\mathrm{R}^2 = \Sigma a^2, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{D}^2 = \Sigma a^2.$$

3. Posons

$$\overline{\mathrm{HA}} \times \overline{\mathrm{HP}} = \overline{\mathrm{HB}} \times \overline{\mathrm{HQ}} = \overline{\mathrm{HC}} \times \overline{\mathrm{HR}} = \overline{\mathrm{HD}} \times \overline{\mathrm{HS}} = k,$$

et formons une équation qui donne k. On peut écrire

$$\overline{\mathrm{HA}}(\overline{\mathrm{HA}} - \overline{\mathrm{PA}}) = k, \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{a^2 - k}{a},$$

et la relation

$$\sum \frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{PA}}} = 1, \qquad \text{ou} \qquad \sum \frac{h-a}{h} = 1,$$

donne l'équation en k

$$(2) \quad \sum \frac{1}{a^2 - k} + \frac{1}{k} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{k}\left(\sum \frac{a^2}{a^2 - k} - 3\right) = 0.$$

Ainsi k est donné par une équation du quatrième degré. Cette équation rendue entière est

$$3k^4 - 2k^3 \Sigma a^2 + k^2 \Sigma a^2 b^2 - a^2 b^2 c^2 d^2 = 0,$$

sans terme du premier degré en k.

4. Si l'on suppose

$$d^2 < a^2 < b^2 < c^2,$$

et, si l'on désigne par $f(k)$ le premier membre de l'équation (2), on a

$$\begin{array}{c|ccccccc} k & -\infty & 0 & d^2 & a^2 & b^2 & c^2 & +\infty, \\ f(k) & +\varepsilon & -|+ & +|- & +|- & +|- & +|- & -\varepsilon; \end{array}$$

l'équation en k a donc une racine négative, une racine entre d^2 et a^2, une autre entre a^2 et b^2, une dernière entre b^2 et c^2.

La racine négative donne un tétraèdre pour lequel le point H est intérieur. Une racine positive donne un tétraèdre par lequel l'orthocentre est sur le prolongement d'une hauteur au delà du sommet correspondant : avec $d^2 < a^2, b^2, c^2$, l'orthocentre est sur le prolongement de SD au delà de D, et l'on a

$$d^2 < k < a^2, b^2, c^2;$$

la seule racine positive qui donne un tétraèdre réel est donc la plus petite. *Ainsi, lorsqu'on se donne a^2, b^2, c^2, d^2, deux valeurs seulement de k sont acceptables.*

5. Les valeurs des quantités d^2, a^2, b^2, c^2 peuvent d'ailleurs être quelconques. En effet, prenons pour k l'une des deux valeurs moindres que a^2. Si l'on met en place la hauteur SD avec le point H, et si l'on mène le plan perpendiculaire à SD au point S, on peut placer le point A sur une droite menée dans ce plan par le point S, pourvu qu'on ait

$$|a| > \mathrm{SH}, \qquad \text{ou} \qquad |ad| > |k|;$$

or, si l'on substitue $\pm ad$ dans $f(k)$, il reste simplement

$$\frac{1}{b^2 \mp ad} + \frac{1}{c^2 \mp ad},$$

résultats positifs; la racine négative de l'équation en k est donc plus grande que $-|ad|$, la racine comprise entre d^2 et a^2 est plus petite que $|ad|$.

La droite qui doit porter BC est alors déterminée; elle rencontre le prolongement de AS en un point E tel que l'on a, avec des longueurs,

$$\mathrm{SE} \times \mathrm{SA} = \mathrm{SH} \times \mathrm{SD} = \pm \frac{k(d^2 - k)}{d^2},$$

ou, par élévation au carré,

$$\left(\overline{\mathrm{HE}}^2 - \frac{k^2}{d^2}\right)\left(a^2 - \frac{k^2}{d^2}\right) = \frac{k^2(d^2 - k)^2}{d^4};$$

les points B et C existeront si chacune des longueurs $|b|$ et $|c|$ est plus grande que HE, c'est-à-dire si l'on a par exemple (puisque $a^2 d^2 - k^2$ est positif)

$$(b^2 d^2 - k^2)(a^2 d^2 - k^2) > k^2(d^2 - k)^2,$$

ou

$$2k^3 - (d^2 + a^2 + b^2)k^2 + d^2 a^2 b^2 > 0;$$

or, d'après l'équation en k, tant pour la valeur négative de k que pour la valeur comprise entre d^2 et a^2, le terme $\frac{1}{c^2-k}$ étant positif, on a

$$\frac{1}{d^2-k}+\frac{1}{a^2-k}+\frac{1}{b^2-k}+\frac{1}{k}<0;$$

comme a^2-k et b^2-k sont positifs, comme on a de plus

$$k(d^2-k)<0,$$

on peut multiplier par le produit des dénominateurs en changeant le sens de l'inégalité, et l'on obtient précisément le résultat ci-dessus.

6. La formule connue

$$\frac{1}{r}=\sum\frac{1}{h}$$

donne alors

$$(3)\qquad \frac{1}{r}=\sum\frac{a}{a^2-k}.$$

7. On aurait l'équation en r en éliminant k entre les relations (2) et (3). Nous procéderons d'une manière différente.

Considérons les quantités a, b, c, d comme les racines de l'équation

$$(4)\qquad x^4-\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+\delta=0.$$

On a d'abord

$$(5)\qquad D^2=\alpha^2-2\beta;$$

l'équation en k devient

$$(6)\qquad 3k^4-2(\alpha^2-2\beta)k^3+(\beta^2-2\alpha\gamma+2\delta)k^2-\delta^2=0.$$

8. Au point de vue de l'élimination de k entre les

relations (2) et (3), nous transformerons ces relations comme il suit. En ce qui concerne la relation (2), nous formerons la transformée en $y = x^2 - k$ de l'équation (4), et nous écrirons que la somme des inverses des racines est égale à $-\frac{1}{k}$; on est conduit à poser

$$\begin{aligned} k^2 + \beta k + \delta &= kP, \\ \alpha k + \gamma &= N, \\ 2k + \beta &= M, \end{aligned}$$

et l'on obtient

$$(7) \qquad P^2 - 2MP + 2\alpha N = 0.$$

En ce qui concerne la relation (3), nous formerons la transformée en $y = \frac{x^2 - k}{x}$ de l'équation (4), et nous écrirons que la somme des inverses des racines est $\frac{1}{r}$; on est conduit, pour faire l'équation en y, à éliminer x entre les deux équations

$$\begin{gathered} (y^2 - \alpha y)x^2 + (My - N)x + kP = 0, \\ x^2 - yx - k = 0, \end{gathered}$$

et l'on trouve finalement

$$(8) \qquad kP^2 - rNP - N^2 - 2\alpha krP + 2rMN = 0.$$

9. M. G. Lery m'a donné l'idée de résoudre les relations (7) et (8) par rapport aux quantités N et P. On a d'abord la solution $N = 0$, $P = 0$, qui donnerait

$$k^2 + \beta k + \delta = 0, \qquad \alpha k + \gamma = 0;$$

l'élimination de k fournirait une relation entre a, b, c, d, tandis que ces quantités ont été supposées quelconques. Cette solution écartée, si l'on forme la combinaison homogène en N et P,

$$\frac{kP^2 - rNP - N^2}{P^2} = \frac{\alpha krP - rMN}{MP - \alpha N},$$

cette relation prend la forme remarquable

$$(kP^2-N^2)(MP-\alpha N)=\alpha rP(kP^2-N^2).$$

Pour $kP^2=N^2$, l'équation en x admettrait la solution $x=\sqrt{k}$; on aurait alors, par exemple,

$$\overline{HA}^2=k=\overline{HA}\times\overline{HP} \quad \text{ou} \quad \overline{HA}=\overline{HP},$$

ce qui est inadmissible. Cela suppose d'ailleurs $a^2=b^2$, ou c^2, ou d^2.

On doit donc prendre

$$MP-\alpha N=\alpha rP;$$

la relation (7) donne alors

$$P=2\alpha r,$$

et la relation (8), réduite à trois termes, donne

$$N=2r(M-\alpha r);$$

on a finalement

$$k^2+\beta k+\delta=2\alpha kr, \tag{9}$$

$$k(4r-\alpha)=2\alpha r^2-2\beta r+\gamma. \tag{10}$$

L'élimination de k est alors aisée, et l'on a l'équation en r

$$\begin{aligned}(2\alpha r^2-2\beta r+\gamma)^2 &\\ +(\beta-2\alpha r)(4r-\alpha)(2\alpha r^2-2\beta r+\gamma)&\\ +\delta(4r-\alpha)^2&=0\end{aligned} \tag{11}$$

ou

$$\begin{aligned}-(2\alpha r^2-2\beta r+\gamma)[6\alpha r^2-2(\alpha^2+\beta)r+(\alpha\beta-\gamma)]&\\ +\delta(4r-\alpha)^2&=0.\end{aligned} \tag{12}$$

10. Quand on se donne a^2, b^2, c^2, d^2, c'est-à-dire quand on se donne les longueurs HA, HB, ..., on obtient, comme on l'a vu, deux tétraèdres réels, l'un pour lequel le point H est intérieur, l'autre pour lequel le point H est extérieur. Pour chacun de ces tétraèdres, on obtient les rayons des sphères tangentes aux quatre faces en appliquant la formule (9), avec des signes convenables pour a, b, c, d.

II.

11. *La deuxième sphère des douze points d'un tétraèdre orthocentrique peut-elle être tangente à une sphère inscrite ou exinscrite?*

Le contact aura lieu si l'on a (p. 71)

$$\overline{OI}^2 = (R \mp 3r)(R \pm r) = R^2 \mp 2Rr - 3r^2,$$

O étant le centre de la sphère circonscrite; or on a, comme à la page 83,

$$R^2 - \overline{OI}^2 = r \times (\Sigma a - 3r);$$

la condition du contact est donc

$$\pm 2R + 3r = \Sigma a - 3r,$$

ou

$$(13) \qquad 6r = \alpha \mp D.$$

12. L'une des racines de l'équation en r, correspondant à une valeur de k acceptable ou non, vérifiera cette relation si l'on a, en mettant D pour $\pm$ D,

$$\begin{aligned}[\alpha(\alpha - D)^2 - 6\beta(\alpha - D) + 18\gamma]& \\ \times [\alpha(\alpha - D)^2 - 2(\alpha^2 + \beta)(\alpha - D) + 6(\alpha\beta - \gamma)]& \\ - 3\delta[4(\alpha - D) - 6\alpha]^2 = 0&;\end{aligned}$$

en tenant compte de la valeur de D^2 pour chaque crochet, cela donne

$$\begin{aligned}[(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 9\gamma) - (\alpha^2 - 3\beta)D][(\alpha\beta - 3\gamma) + \beta D]& \\ - 3\delta[(5\alpha^2 - 8\beta) + 4\alpha D] = 0&;\end{aligned}$$

on trouve, en achevant le calcul, et en rétablissant le double signe,

$$\begin{aligned}&\alpha^2\beta^2-6\beta^3+21\alpha\beta\gamma-3\alpha^3\gamma-27\gamma^2-3\delta(5\alpha^2-8\beta)\\&\quad=\pm\alpha(\beta^2-3\alpha\gamma+12\delta)\sqrt{\alpha^2-2\beta}.\end{aligned}$$

13. Pour reconnaître les invariants S et T d'un polynome de quatrième degré, nous prendrons maintenant l'équation qui donne les valeurs des quantités $\overline{\text{HA}}$, $\overline{\text{HB}}$, ..., sous la forme

$$ax^4-4bx^3+6cx^2-4dx+e=0; \tag{14}$$

les racines de cette équation sont aussi désignées par a, b, c, d, mais il n'y a à craindre aucune confusion. On a alors

$$\alpha=\frac{4b}{a},\qquad \beta=\frac{6c}{a},\qquad \gamma=\frac{4d}{a},\qquad \delta=\frac{e}{a},$$

et la relation précédente prend la forme

$$\begin{aligned}&12b^2c^2-27ac^3+42abcd-16b^3d-9a^2d^2-ae(5b^2-3ac)\\&\quad=\pm\varepsilon\times 2b(ae-4bd+3c^2)\sqrt{4b^2-3ac},\end{aligned}$$

ε étant le signe de a.

Or les invariants S et T sont

$$\begin{aligned}\mathrm{S}&=ae\ -4bd\ +3c^2,\\ \mathrm{T}&=ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3,\end{aligned}$$

et nous considérerons encore les quantités bien connues

$$\mathrm{V}=b^2-ac,\qquad \mathrm{U}=3a\mathrm{T}+2\mathrm{VS}.$$

Si, du premier membre de la relation écrite plus haut, on retranche $3\mathrm{U}$, il reste $-2b^2\mathrm{S}$; cette relation peut donc s'écrire

$$3\mathrm{U}-2b^2\mathrm{S}=\pm\varepsilon\times 2b\mathrm{S}\sqrt{b^2+3\mathrm{V}}, \tag{15}$$

ou, sous forme rationnelle,

$$9U^2 - 12b^2SU - 12b^2VS^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(16) \qquad 3U^2 - 4b^2S(U + VS) = 0.$$

On peut encore écrire

$$U^2 - 4b^2S(aT + VS) = 0$$

ou

$$U^2 - 2b^2S(U - aT) = 0.$$

Si l'on remplace U par $3aT + 2VS$, on voit que a est en facteur; ce fait s'explique aisément.

14. La relation (16) est satisfaite si l'on a $S = 0$, $T = 0$; trois des quantités a, b, c, d sont alors égales, et l'on a une pyramide triangulaire régulière. Nous écarterons ce cas, qui est sans intérêt.

15. En supposant, pour simplifier l'écriture, que le premier coefficient de l'équation (14) est égal à 1, la relation (16) contient seulement S, T, V, et b ou $\frac{\alpha}{4}$. On a d'ailleurs

$$V = \frac{1}{48}\sum(a - b)^2,$$

de sorte que V, aussi bien que S et T, ne dépend que des différences des racines.

Si l'on se donne les valeurs des différences $a - d$, $b - d$, $c - d$, les valeurs des quantités S, V, T sont déterminées, et la relation (16), dans laquelle U, V, S sont positifs (*voir* plus loin) fait connaître la valeur de la somme $a + b + c + d$, ou

$$(a - d) + (b - d) + (c - d) + 4d;$$

cette relation détermine donc d, et, par suite, a, b, c.

La question est de savoir si la valeur correspondante de k est acceptable, c'est-à-dire si cette valeur est négative, ou comprise entre d^2 et a^2, en supposant

$$d^2 < a^2 < b^2 < c^2.$$

16. La relation (15) exprime qu'on a

$$3U - 2b^2S \mp bS \times aD = 0,$$

le double signe correspondant à celui de la formule

$$6r = \alpha \mp D = \frac{4b \mp aD}{a};$$

si l'on écrit

$$3(U - 2b^2S) + bS(4b \mp aD) = 0,$$

on a donc, en divisant par 3, la formule

$$(17) \qquad (U - 2b^2S) + 2abrS = 0$$

qui fait connaître r. Comme la relation sous forme rationnelle peut s'écrire

$$U(U - 2b^2S) + 2ab^2ST = 0,$$

on aurait encore

$$r = \frac{bT}{U};$$

mais nous emploierons la valeur de r donnée par la relation (17).

On peut écrire

$$(18) \qquad U = 2bS(b - ar).$$

17. En remplaçant b par $\frac{\alpha}{4}$, avec $a = 1$, on a donc

$$r = \frac{\alpha^2S - 8U}{4\alpha S},$$

$$\alpha - 4r = \frac{8U}{\alpha S}.$$

On a d'ailleurs

$$S = \frac{1}{24}\sum(a-b)^2(c-d)^2 \qquad = \frac{A}{24},$$
$$8U = \frac{1}{24}\sum(b-c)^2(c-d)^2(d-b)^2 = \frac{B}{24};$$

l'expression de U résulte de ceci : le polynome $ax^4 + 4bx^3 + \ldots$ étant désigné par F, et son hessien étant H, la quantité U, ou $3aT - 2(ac - b^2)S$, est le coefficient de x^4 dans le covariant $3TF - 2SH$; or ce covariant est, avec $a = 1$,

$$\frac{1}{192}\sum(b-c)^2(c-d)^2(d-b)^2(x-a)^4;$$

voir Salmon, *Leçons d'Algèbre supérieure*. On voit que U est positif, comme on l'a dit.

On a ainsi

$$(19) \qquad r = \frac{\alpha^2 A - B}{4\alpha A},$$

$$(20) \qquad \alpha - 4r = \frac{B}{\alpha A}.$$

La relation (10) donne alors

$$(21) \qquad k = \frac{-(\alpha^2 A - B)^2 + 4\beta A(\alpha^2 A - B) - 8\alpha\gamma A^2}{8AB}.$$

18. Lorsque deux des quantités a, b, c, d sont égales, soit $a = b$ (sans rien supposer ici sur la grandeur relative des quantités a^2, c^2, d^2), l'équation en k admet la racine a^2; cette racine est d'ailleurs inadmissible, car on ne peut avoir, comme on l'a déjà dit,

$$\overline{HA}^2 = \overline{HA} \times \overline{HP}.$$

Or on a alors

$$A = 2(a-c)^2(a-d)^2,$$
$$B = 2(a-c)^2(a-d)^2(c-d)^2,$$

d'où

$$\alpha - 4r = \frac{(c-d)^2}{\alpha},$$

$$r = \frac{(a+c)(a+d)}{\alpha};$$

la relation (10) donne ensuite

$$k = a^2,$$

et ce résultat s'obtiendrait, en conséquence, par la formule (21). On voit que la valeur obtenue pour k est précisément une valeur inadmissible.

La formule $r = \frac{b\mathrm{T}}{\mathrm{U}}$ *n'aurait pas conduit au résultat sans tenir compte de la relation* (16); en tenir compte, ce serait revenir à la relation (17) ou (18) qu'on vient d'utiliser.

19. Ainsi la relation (21) donne directement, *c'est-à-dire sans intervention de la condition* (16) *qui lie* a, b, c, d,

$$\begin{array}{lll} k = a^2 & \text{pour} & a = b,\ c,\ \text{ou}\ d, \\ k = b^2 & \text{pour} & b = a,\ c,\ \text{ou}\ d, \end{array}$$

etc. Le numérateur est du douzième degré par rapport à l'ensemble des quantités a, b, c, d; il est du sixième degré en a, par exemple, le terme du quatrième degré en a dans $\alpha^2 \mathrm{A} - \mathrm{B}$ disparaissant. On est ainsi conduit à prévoir la formule

$$(22)\quad k = \frac{16(a-b)^2(a-c)^2\ldots(c-d)^2\left[\sum \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} - 1\right]}{8\mathrm{AB}},$$

qui, pour $a = b$ par exemple, donne bien $k = a^2$. J'ai d'abord écrit, dans le crochet,

$$\sum \frac{\lambda(a^2+b^2) + 2\mu ab}{(a-b)^2} + \theta;$$

en remplaçant $2ab$ par $(a^2 + b^2) - (a - b)^2$, j'ai écrit ensuite

$$\sum \frac{\lambda'(a^2 + b^2)}{(a - b)^2} + \theta';$$

il faut faire alors $\lambda' = 1$ pour trouver $k = a^2$ dans l'hypothèse $a = b$. Je reviendrai sur la valeur de θ'.

20. Pour vérifier la formule (22), il faut vérifier que le numérateur est égal à celui de la formule (21). Comme ces numérateurs sont du sixième degré en a, il suffit de montrer qu'ils sont égaux par les trois valeurs

$$a = b, \ c, \quad \text{ou} \quad d,$$

que leurs dérivées, par rapport à a, sont égales pour ces mêmes valeurs, enfin que les coefficients de a^6 sont égaux. Le premier fait résulte de ce qu'on a dit au n° 18; j'ai vérifié le second pour $a = b$; la comparaison des coefficients de a^6 donne $\theta' = -1$.

21. Il reste à montrer que la valeur de k n'est pas acceptable, c'est-à-dire qu'elle n'est pas négative, ni comprise entre d^2 et a^2.

On voit aisément que cette valeur est positive. En effet, deux au moins des quatre quantités a, b, c, d sont de même signe; s'il en est ainsi pour a et b, par exemple, la fraction $\frac{a^2 + b^2}{(a - b)^2}$ est plus grande que 1, et k est positif.

22. En cherchant à comparer la valeur de k aux quantités d^2, a^2, b^2 et c^2, j'ai été conduit à remarquer l'identité

$$(23) \quad \mathrm{A} \times \mathrm{B} = 4(a - b)^2(a - c)^2 \ldots (c - d)^2 \sum \frac{1}{(a - b)^2}.$$

L'égalité a lieu pour chacune des hypothèses

$$a = b, \qquad a = c, \qquad \ldots, \qquad a + d = b + c, \qquad \ldots, \qquad \ldots;$$

si le polynome

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} - 4(a-b)^2(a-c)^2 \ldots \sum \frac{1}{(a-b)^2},$$

qui est du degré 10, n'était pas identiquement nul, il serait donc divisible par le produit

$$(a-b)(a-c)\ldots(a+d-b-c)\ldots,$$

qui est du degré 9; le quotient serait de la forme

$$(a+b+c+d) \times \text{const.};$$

mais alors le polynome serait du septième degré en a, tandis qu'il est seulement du degré 6. On a donc l'identité (23), et la valeur de k prend la forme

$$(24) \qquad k = \frac{\sum \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} - 1}{2 \sum \frac{1}{(a-b)^2}}.$$

Pour $a = b$, cela donne bien $k = a^2$.

23. Il serait, je crois, assez difficile de montrer directement que cette valeur de k est plus grande que a^2, dans l'hypothèse

$$d^2 < a^2 < b^2 < c^2;$$

peut-être même faudrait-il tenir compte de la relation (16) qui lie a, b, c, d, bien que le fait se soit montré exact sur un assez grand nombre d'exemples numériques où a, b, c, d étaient quelconques.

Mais on peut regarder la relation (24) comme la condition que doit remplir le tétraèdre orthocentrique, interpréter cette condition géométriquement, montrer qu'elle est impossible avec un tétraèdre *réel*. Il suffit pour cela d'écrire

$$\sum \frac{a^2 + b^2 - 2k}{(a-b)^2} = 1;$$

comme on a

$$a^2 + b^2 - 2k = \overline{AB}^2,$$

la condition est

$$(25) \qquad \sum \frac{\overline{AB}^2}{(a-b)^2} = 1.$$

Or, si a et b, par exemple, sont de même signe, la fraction $\frac{\overline{AB}^2}{(a-b)^2}$ est plus grande que 1, de sorte que la condition (25) ne peut avoir lieu. Le théorème est ainsi démontré.

On a toutefois supposé que deux des quantités a, b, c, d ne sont pas égales. Pour $a = b$, la relation (25) est satisfaite si l'on a

$$a = b = c \quad \text{ou} \quad d, \qquad \text{ou bien} \qquad a = c, \qquad b = d;$$

on a écarté le premier cas. Dans le second cas, il faut revenir à la condition (16); on a alors $U = 0$, mais S et V sont différents de zéro, de sorte qu'on devrait avoir $a + b + c + d = 0$, ou $a = c = -b = -d$; cette hypothèse n'est pas admissible.

III.

24. Dans le cas particulier où l'on a

$$d = 0,$$

l'équation du quatrième degré en k a une racine double égale à zéro, une racine entre a^2 et b^2, une autre entre

b^2 et c^2; la première seule donne un tétraèdre réel avec un trièdre trirectangle en D. L'équation (12) se décompose alors, δ étant nul; le premier facteur donne deux valeurs de r relatives au tétraèdre à trièdre trirectangle; le second facteur donne deux valeurs de r relatives aux deux tétraèdres imaginaires.

La condition de contact

$$6r = \alpha \mp D$$

donne alors directement

$$[(\alpha\beta - 9\gamma)^2 - 6(\alpha^2 - 3\beta)(\beta^2 - 3\alpha\gamma)] \\ \times [2\beta(\beta^2 - 3\alpha\gamma) + 9\gamma^2] = 0,$$

a, b, c étant racines de l'équation

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0;$$

le premier facteur ne peut être nul, sauf dans l'hypothèse $a = b = c$ qu'on écarte; le second facteur n'est pas à considérer. Naturellement, la valeur de k fournie par la formule (24) n'est pas la valeur zéro.

Nota. — Le théorème établi ici est un exemple d'une *condition simple* donnant lieu à *deux conditions*, en raison de l'obligation que l'on impose à la figure d'être *réelle*.