Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 524-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__524_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2107.

(1908, p. 480.)

On donne une parabole P *et une tangente fixe* T *à* P. *Le lieu des foyers des paraboles* Q *qui ont* T *pour tangente au sommet et qui sont tangentes à* P *est une parabole* R *tangente aussi à* T *ayant même foyer que* P *et dont l'axe est perpendiculaire à celui de* P. (E.-N. Barisien.)

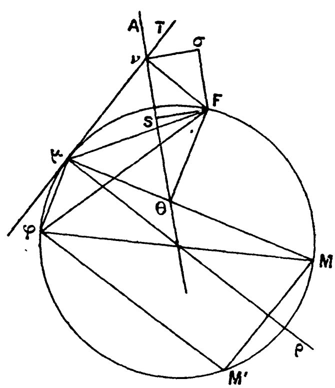
SOLUTION,

Par M. G. Pélissier.

Soient F le foyer de P, A sa tangente au sommet, M le point de contact de P et de Q, $M\mu$ la tangente commune. Le foyer φ de Q s'obtient ainsi : on élève en μ la perpendiculaire $\mu\varphi$ à μM; on prend le symétrique M' de M par rapport à la droite $\mu\rho$ perpendiculaire en μ à T; le point φ est à l'intersection de $\mu\varphi$ et de la parallèle $M'\varphi$ à $\mu\rho$. Le quadrilatère $\varphi\mu MM'$ est inscriptible et le cercle circonscrit est tangent en μ à T. Ce cercle passe aussi par F, car c'est la limite du cercle circonscrit au triangle formé par les deux tangentes T et $M\mu$ à P et par une troisième tangente venant se confondre avec $M\mu$. Il suit de là que

$$\widehat{M\varphi F} = \widehat{M\mu F}.$$

Or l'angle $\widehat{\mu F\theta}$, d'où l'on voit de F la portion de tangente $M\mu$ à P comprise entre les tangentes fixes A et T, est constant :



l'angle $\widehat{M\mu F}$ qui est son complément est donc aussi constant ainsi que $\widehat{M\varphi F}$. Le triangle rectangle $F\varphi M$ reste donc semblable à lui-même; le sommet F est fixe, M décrivant P, φ décrit une parabole R déduite d'une parabole P' homothétique de P par rapport à F par une rotation de 90° autour de F. R a donc pour foyer F et son axe est perpendiculaire à celui de P.

D'autre part, soient s le sommet de P, σ la projection de F sur la perpendiculaire $\nu\sigma$ menée par ν à A. Le quadrilatère inscriptible $\mu\nu F\theta$ montre que

$$\widehat{\theta\nu F} = \widehat{\theta\mu F} = \widehat{F\varphi M}.$$

Le triangle $s\nu F$ ou son égal $sF\sigma$ est donc semblable à $M\varphi F$, et σ est l'homologue de s dans la similitude qui transforme P en R ; σ est donc le sommet de R qui est dès lors tangente à T.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

2109.

(1908, p. 480.)

Du point où le cercle inscrit à un triangle donné touche un des côtés on abaisse une perpendiculaire sur la droite qui joint le milieu de ce côté au centre du cercle. Elle rencontre la hauteur issue du sommet opposé à ce côté en un point dont la distance au milieu du segment compris entre ce sommet et l'orthocentre du triangle est égale au rayon du cercle circonscrit au triangle donné.

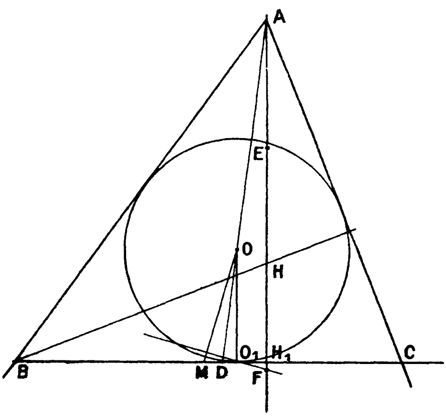
(CANON.)

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

On sait que, si E est le milieu de AH,

$$EH = R\cos A \qquad (R = \text{rayon du cercle } ABC);$$



d'autre part,

$$AH \times HH_1 = 3R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

On en déduit que

$$EH_1 = R\cos(B - C);$$

d'autre part,

$$H_1F = \frac{b-c}{2r} O_1H_1 \qquad (r = \text{rayon du cercle inscrit});$$

on doit donc avoir

$$R\cos(B - C) + \frac{b - c}{2r} O_1H_1 = R$$

ou

$$O_1H_1 \cos\frac{B + C}{2} = r\sin\frac{B - C}{2},$$

mais

$$r\sin\widehat{DOO_1} = DO_1 \cos\frac{B - C}{2} = r\sin\frac{B - C}{2};$$

or

$$\frac{r}{AH_1} = \frac{DO_1}{DH_1} = \frac{a}{2p},$$

d'où

$$\frac{DO_1}{O_1H_1} = \frac{a}{b + c},$$

d'où

$$(b + c)\cos\frac{B + C}{2} = a\cos\frac{B - C}{2}$$

ou

(1) $$\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{p - a}{p};$$

comme

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2} = \frac{r}{p - c}, \qquad \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{r}{p - b}$$

et

$$r^2 = \frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p},$$

la relation (1) est une identité, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par MM. Barisien et Lez.