Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 51-55
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__51_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2092.

(1908, p 143.)

D'un point M *variable d'une parabole de sommet* O *on abaisse les deux normales dont les pieds sont* P *et* Q. *Il existe une parabole tangente aux côtés du triangle* MPQ *et ayant son foyer en* O. *Le lieu du point de rencontre de la droite* OM *avec la directrice de cette parabole est une ellipse.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soit

$$u^2 + v^2 + w(\alpha u + \beta v) = 0$$

la parabole inscrite dans le triangle MPQ ayant pour foyer le point O.

Soient

$$x = t^2,$$
$$y = t\sqrt{2p}$$

les coordonnées de M.

L'équation aux coefficients angulaires des normales MP, MQ est

$$m^2 - \frac{2t}{\sqrt{2p}} m + 2 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues de M à la parabole est

$$m^2(\alpha t^2 - 1) - mt(\beta t + \alpha\sqrt{2p}) + \beta t\sqrt{2p} - 1 = 0.$$

Identifions ces deux équations, il vient

$$\alpha = -\frac{1}{2p}, \qquad \beta = -\frac{p+t^2}{tp\sqrt{2p}};$$

la directrice de la parabole a pour équation

$$\alpha x + \beta y - 2 = 0$$

ou

$$\frac{x}{2p} + y\frac{t^2+p}{tp\sqrt{2p}} + 2 = 0;$$

la droite OM,

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{\sqrt{2p}};$$

éliminons t, il vient

$$3x^2 + 2y^2 + 4px = 0.$$

Autre solution analytique par M. Pélissier. Solution géométrique par M. Clapier.

2093.

(1908, p. 143.)

Étant donné un triangle $\alpha\beta\gamma$, *une transversale rencontre les côtés* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *en* M, N, P, *et l'on considère sur* $\beta\gamma$ *le segment* AD *de milieu* M *dont les extrémités* A *et* D *divisent harmoniquement* $\beta\gamma$, *sur* $\gamma\alpha$ *le segment analogue* BE, *sur* $\alpha\beta$ *le segment analogue* CF ; *les six points* A, D, B, E, C, F *sont les sommets d'un quadrilatère complet. Si la droite* MNP *reste tangente à une conique* S *circonscrite au triangle* $\alpha\beta\gamma$, *chacun des quatre côtés* DEF, DBC, ECA, FAB *du quadrilatère complet passe par un point fixe, et les quatre points obtenus sont les sommets d'un quadrangle dont* $\alpha\beta\gamma$ *est le triangle diagonal. Examiner le cas particulier où la conique* S *est le cercle circonscrit au triangle* $\alpha\beta\gamma$. (*Sur ce cas particulier, voir* Kœhler, *Exercices*, p. 177.)

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

Soient m, n, p et a, b, c les coordonnées homogènes de M, N, P et A, B, C ; celles de D, E, F sont $-a$, $-b$, $-c$.

On a
$$m = a^2, \qquad n = b^2 \qquad \text{et} \qquad p = c^2.$$
Or
$$m.n.p = 1;$$
donc
$$a.b.c = \pm 1;$$

La première partie est ainsi établie.

En prenant pour triangle de référence $\alpha\beta\gamma$, l'équation tangentielle de la conique est
$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0;$$
l'équation de la droite MNP étant
$$ux + vy + wz = 0,$$
on a
$$\frac{w}{v} = km, \qquad \frac{u}{w} = hn.$$

k et h sont des nombres qui ne dépendent que des éléments du triangle de référence. Portons les valeurs de u et v dans l'équation de la conique, on a
$$ab\sqrt{h.k} + a\sqrt{k} + 1 = 0;$$
donc le côté AB passe par un point fixe; de même pour les trois autres côtés.

Lorsque la droite MN est tangente en α, les points B, C, E et F sont confondus en α, et les points fixes par lesquels passent les côtés BC et EF sont alignés sur α; donc $\alpha\beta\gamma$ est le triangle diagonal du quadrangle de ces points fixes.

Quand la conique est le cercle circonscrit, les quatre points fixes sont évidemment les quatre centres des cercles inscrit et exinscrits.

Autres solutions par MM. BOUVAIST et SONDAT.

2094.

(1908, p. 144.)

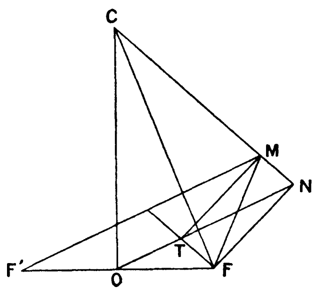
Démontrer que les cercles bitangents à une hyperbole et ayant leur centre sur l'axe non transverse sont vus d'un foyer sous angle fixe.

(M. Tétu.)

SOLUTION

Par M. F. Boulad.

Soient C le centre d'un cercle bitangent à une hyperbole de centre O et M son point de contact avec la branche du côté d'un foyer F de cette hyperbole. Il suffit de prouver que le rapport du rayon CM de ce cercle à la distance CF est con-



stant. Pour cela, projetons le foyer F respectivement en T et N sur la tangente et la normale en M. Je dis que les deux angles $\widehat{FTO}$ et $\widehat{TOF}$ du triangle FTO sont respectivement égaux aux angles $\widehat{FMC}$ et $\widehat{MCF}$ du triangle FMC.

En effet, on sait que les trois points O, T et N sont situés sur une droite parallèle au rayon vecteur F'M. Comme l'angle $\widehat{NTF}$ = l'angle $\widehat{FMN}$, leurs suppléments $\widehat{FTO}$ et $\widehat{FMC}$ sont égaux. En outre, le quadrilatère FOCN, ayant ses deux angles opposés O et N droits, est inscriptible dans un cercle. On a, par suite,

$$\text{angle } \widehat{NOF} = \text{angle } \widehat{NCF}.$$

Il s'ensuit que les deux triangles FMC et FTO sont semblables et donnent

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{FC}} = \frac{\mathrm{TO}}{\mathrm{OF}} = \frac{a}{c}.$$

Autres solutions par MM. Barisien, Betto, Bouvaist, Bros, Parrod, Pélissier.

2095.

(1908, p. 240.)

Si deux quadriques ont en commun deux génératrices Ox, Oy, *le long desquelles elles se raccordent, elles ont en* O *un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'une perpendiculaire au plan* xOy *rencontre les deux quadriques en deux points* M *et* M', *dont la distance est un infiniment petit du quatrième ordre en prenant* OM *comme infiniment petit principal.*

(G. F.)

SOLUTION

Par M. Tétu.

Prenons pour axes de coordonnées Ox, Oy et la perpendiculaire Oz menée par O au plan xOz. Les équations des deux quadriques sont

$$\lambda z^2 + 2Ayz + 2Bzx + 2Cxy + 2Dz = 0,$$
$$\lambda' z^2 + 2Ayz + 2Bzx + 2Cxy + 2Dz = 0.$$

Je vais montrer que les sections par des plans passant par Oz sont des coniques ayant en O un contact du troisième ordre. Coupons par $y = mx$, les projections des coniques sur xOz sont

$$\lambda z^2 + 2(Am + B)xz + 2Cmx^2 + 2Dz = 0,$$
$$\lambda' z^2 + 2(Am + B)xz + 2Cmx^2 + 2Dz = 0,$$

équations qui représentent deux coniques ayant en O quatre points communs confondus.