NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. DESAINT

Théorèmes sur les limites

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 510-517

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__510_1>

[D1a]

THÉORÈMES SUR LES LIMITES;

PAR M. L. DESAINT.

Voici quelques théorèmes dont les derniers n'ont pas encore été donnés, il me semble, et qui sont faciles à appliquer :

Si, à partir de $z = u_0$, *la fonction*

$$f(z)$$

est croissante,

$$\frac{f(z)}{z}$$

restant inférieur à 1 *quand* z *augmente indéfiniment, la suite de nombres positifs*

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n \qquad (u_1 > u_0),$$

où deux termes consécutifs satisfont à

$$u_n = f(u_{n-1}),$$

tend vers une limite.

Les quantités

$$u_0,\quad u_1,\quad \ldots$$

croissent.

En effet, admettons

$$u_n > u_{n-1}$$

pour tous les indices

$$n = 1,$$
$$n = 2$$

jusqu'à n.

Il est facile de démontrer que

$$u_{n+1} > u_n.$$

A cause de la fonction $f(z)$ et de sa croissance,

$$f(u_n) > f(u_{n-1})$$

et

$$u_{n+1} > u_n.$$

Ensuite constatons que les u ne peuvent augmenter indéfiniment. Sans quoi,

$$\frac{f(u_n)}{u_n} \qquad (n > \mathrm{N})$$

devenant inférieur à 1,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

qui lui est égal, devient inférieur à 1, ce qui est contraire à la première partie de la démonstration.

La limite λ des u est d'ailleurs racine de

$$x = f(x)$$

si la fonction $f(x)$ non seulement est croissante, mais est aussi continue.

On peut donner un énoncé plus large ·

Si

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{n-1}, \quad \ldots \qquad (u_1 > u_0)$$

forment une suite de quantités admettant une loi de récurrence

$$\varphi(u_{n-1}) = f(u_n),$$

$f(z)$ et φ étant des fonctions croissantes à partir de

$z = u_0$, les ordres d'infinitude de $\varphi(z)$ et $f(z)$ étant différents, celui de $\varphi(z)$ étant plus grand que celui de $f(z)$ si z est l'infiniment grand principal, la suite des u_n tend vers une limite.

Je vais faire voir que, en supposant les termes u croissant jusqu'au terme u_{n-1}, on a encore

$$u_n > u_{n-1}.$$

Essayons l'hypothèse contradictoire

$$u_n < u_{n-1}.$$

Dans ces conditions

$$\varphi(u_{n-1}) = f(u_n) < [f(u_{n-1}) = \varphi(u_{n-2})],$$

d'après notre hypothèse de la croissance de la fonction $f(z)$.

Pareillement

$$\varphi(u_{n-1}) > \varphi(u_{n-2}),$$

à cause de la propriété de $\varphi(z)$.

Les deux inégalités qui précèdent se contredisent.

Les quantités u_n vont en croissant.

Il reste à montrer que les u restent finis.

Si u_n augmentait indéfiniment, alors

$$f(u_n) > f(u_{n-1}) = \lambda u_{n-1}^{\alpha}(1+\varepsilon),$$

α étant l'ordre d'infinitude de $f(z)$, pour z infini.

Pareillement

$$\varphi(u_{n-1}) = \lambda' u_{n-1}^{\beta}(1+\varepsilon_1).$$

Or

$$f(u_n) = \varphi(u_{n-1}),$$

d'où

$$\lambda' u_{n-1}^{\beta}(1+\varepsilon_1) = \lambda u_{n-1}^{\alpha}(1+\varepsilon) + \eta \qquad (\eta > 0).$$

Or, l'ordre d'infinitude α est plus grand que β; cette égalité deviendrait impossible pour u_{n-1} infini.

Il n'est pas difficile d'aller encore plus loin en remarquant au préalable que la limite précédente est solution de

$$f(x) = \varphi(x).$$

Étant donné un ensemble

$$u_0, \quad u, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_n,$$

déterminé par la loi de récurrence

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, \ldots, u_{n-k}),$$

$f(x, y, z, \ldots)$ *étant une fonction croissante des variables* $x, y, \ldots,$ *quand celles-ci croissent simultanément, les inégalités*

$$0 < u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_k$$

ayant lieu, et la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ *donnant lieu à l'inégalité*

$$\frac{f(z, z, z, \ldots, z)}{z} < 1,$$

pour z *infini, les quantités*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n$$

tendent vers une limite.

Supposons que les quantités $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ aillent en croissant.

Les quantités qui suivent donneront lieu à

$$u_n > u_{n-1}.$$

Remplaçons u_n par

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-k}).$$

Pareillement

$$u_{n-1} = f(u_{n-2}, u_{n-3}, \ldots, u_{n-k-1}).$$

Comme

$$u_{n-1} > u_{n-2},$$
$$u_{n-2} > u_{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_{n-k} > u_{n-k-1},$$

on en déduit

$$u_n > u_{n-1},$$

à cause de la croissance de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$.

Il nous reste à montrer que les quantités u_n restent finies.

Envisageons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n, u_{n-1n}, \ldots, u_{-k+1})}{u_n} < \frac{f(u_n, u_n, u_n)}{u_n},$$

à cause de la croissance de $f(x, y, \ldots)$.

Comme pour z infini

$$\frac{f(z, z, \ldots)}{z} < 1,$$

il n'est pas admissible que u_{n-1} augmente au delà de toute limite, car nous savons que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1,$$

à cause de la croissance des u.

Nous allons envisager le cas où deux suites

$$\begin{array}{llll} u_0, & u_1, & \ldots, & u_n, \\ v_0, & v_1, & \ldots, & v_k \end{array}$$

se présenteraient assujetties aux conditions suivantes :

$$u_n = f_1(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-k}, v_{n-1}, \ldots, v_{n-k'}),$$
$$v_n = f_2(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, v_{n-1}, v_{n-k'}),$$

en supposant les fonctions $f_1(x, y, \ldots, x', y', \ldots)$

et f_2 croissantes, et de plus

$$0 < u_0 < \ldots < u_k,$$
$$0 < v_0 < \ldots < v_k$$

et

$$\frac{f_1(z, z, \ldots, z', z')}{z} < 1,$$

$$\frac{f_2(z, z, \ldots, z', z')}{z'} < 1,$$

pour z et z' infiniment grands positifs. Dans ce cas

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_n,$$
$$v_0, \quad v_1, \quad \ldots, \quad v_n$$

tendent vers une limite.

Montrons que les u et les v croissent.

Supposons que ce soit vrai depuis u_0 jusqu'à u_{n-1}, depuis v_0 jusqu'à v_{n-1}.

Je vais montrer que

$$u_n > u_{n-1},$$
$$v_n > v_{n-1}.$$

Envisageons

$$u_n \quad = f(u_{n-1}, \ldots, v_{n-1}),$$
$$u_{n-1} = f(u_{n-2}, \ldots, v_{n-2}),$$

à cause de la croissance de la fonction f,

$$f(u_{n-1}, \ldots, v_{n-1}, \ldots) \gtrless f(u_{n-2}, \ldots, v_{n-2}, \ldots),$$

car

$$u_{n-2} < u_{n-1},$$
$$v_{n-2} < v_{n-1}, \quad \ldots.$$

Ces quantités restent finies.

Pour le voir, envisageons

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots)}{u_{n-1}}$$
$$< \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-1}, \ldots, v_{n-1}, v_{n-1}, \ldots)}{u_{n-1}},$$

à cause de la croissance des v et des u avec l'indice et de la croissance de la fonction $f_1(x, y, \ldots, x', \ldots)$.

Comme

$$\frac{f_1(z, \ldots, z', z', \ldots)}{z}$$

reste inférieur à 1 quand z, z' sont infiniment grands positifs, il est impossible que les v_{n-1} et u_{n-1} augmentent indéfiniment; l'inégalité précédente

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-1}, \ldots, v_{n-1}, v_{n-1}, \ldots)}{u_{n-1}},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{f_1(z, z, \ldots, z', z', \ldots)}{z},$$

z', z augmentant au delà de toute limite, demanderait que u_n devînt plus petit que u_{n-1}; la croissance de u_n avec l'indice empêche une semblable conclusion.

Un semblable raisonnement ferait voir que les v restant finis de même tendent vers une limite.

Nous sommes, pour justifier l'existence de la proposition précédente, tenus de montrer que les conditions de l'énonce peuvent être réalisées.

Ainsi

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} - \frac{1}{v_{n-1}+1} + 2},$$

$$v_n = \sqrt{v_{n-1} - \frac{1}{u_{n-1}+1} + 2},$$

en faisant

$$v_0 = u_0 = 0,$$

entraînent

$$u_1 = v_1 = 1 > u_0, v_0.$$

Les fonctions

$$\sqrt{z - \frac{1}{z'+1} + 2} \quad \text{et} \quad \sqrt{z' - \frac{1}{z+1} + 2}$$

croissent avec z et z'.

Ensuite

$$\frac{\sqrt{z - \frac{1}{z'+1} + 2}}{z} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{z' - \frac{1}{z+1} + 2}}{z'}$$

tendent vers zéro, quand z' et z augmentent indéfiniment, par suite restent inférieurs à 1 dès que z' et z augmentent infiniment.

Pour appliquer les résultats précédents, il sera nécessaire souvent de préparer l'étude par la recherche des relations pouvant lier des u d'indices différents.

Prenons

$$u_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 \ldots}}}$$

Il est facile de constater que

$$u_n = \sqrt{3 + u_{n-1}}.$$

Ici

$$u_0 = \sqrt{3},$$
$$u_1 = \sqrt{3 + \sqrt{3}} > u_0;$$

de plus,

$$f(z) = \sqrt{3 + z}$$

est croissante avec z et

$$\frac{\sqrt{3+z}}{z} < 1,$$

à partir de z suffisamment grand, car

$$\frac{\sqrt{3+z}}{z} \to 0,$$

pour z infini.

Par suite, les u tendent vers une limite.