

Certificat d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 469-475

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9_469_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I^{re} QUESTION (COURS). — *Réduction de l'intégrale générale elliptique de première espèce à la forme normale de Weierstrass.*

II^e QUESTION. — *Le rayon de courbure R, en un point M d'une certaine courbe plane C, est lié à l'ordonnée y de ce point par la relation*

$$R^2 = \frac{a^4}{4y^2},$$

où *a* est une constante donnée.

Calculer les coordonnées du point M en fonction de l'arc M₀M de la courbe C, compté à partir d'un point fixe M₀ de cette courbe, en employant les notations de Jacobi.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un quadrilatère plan LMNO se déforme, ses côtés conservant des longueurs constantes. Les angles de ce quadrilatère ayant respectivement pour sommets L, M, N, O, étant désignés par λ, μ, ν, ω, satisfont aux*

relations différentielles

$$\frac{d\lambda}{MNO} = \frac{-d\mu}{LNO} = \frac{d\nu}{LMO} = \frac{-d\omega}{LMN},$$

où les dénominateurs désignent les aires des triangles MNO, etc.

(On suppose que, en parcourant dans un sens déterminé le périmètre du quadrilatère, les sommets se présentent dans l'ordre L, M, N, O.)

En partant de ces relations (qu'on pourra admettre), on demande d'exprimer

$$\operatorname{tang} \frac{\lambda}{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{\mu}{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{\nu}{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

en fonction d'un paramètre u défini en désignant par u la valeur commune des rapports précédents.

On supposera que les côtés ont respectivement pour mesure les nombres suivants :

$$LM = 6, \quad MN = 3, \quad NO = 3, \quad OL = 4.$$

On prendra comme position initiale du quadrilatère celle pour laquelle les côtés MN et NO sont en ligne droite, le quadrilatère se réduisant à un triangle isocèle.

NOTA. — Dans les formules différentielles données ci-dessus, les dénominateurs sont tous positifs lorsque le quadrilatère est convexe.

(Juillet 1908.)

Grenoble.

COMPOSITION. — On donne la surface représentée par les équations

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \sin \varphi, \\ y &= \sin \theta \cos \varphi, \\ z &= \cos \theta + L \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} + f(\varphi), \end{aligned}$$

θ et φ étant deux paramètres variables et f une fonction de φ seulement.

1° Montrer qu'une première famille de lignes de cour-

bure est formée par des courbes planes (C_1) et la deuxième famille par des courbes sphériques (C_2).

2° Montrer qu'il y a une ligne de courbure (Γ) qui ne fait partie, en général, d'aucune de ces deux familles.

Que doit être f pour que Γ soit une courbe $\theta = \text{const.}$?

Quelle est dans ce cas la forme de la projection des courbes (C_2) sur le plan de xy ?

3° Que doit être f pour que les plans des courbes C_1 coupent tous la surface sous le même angle? Quelle est dans ce cas la forme de la projection des courbes C_2 sur xOy ?

4° Dans quel cas les courbes C_2 sont-elles des courbes planes?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Construire la courbe

$$x = \frac{1}{pu}, \quad y = \frac{1}{p'u - 6},$$

sachant que p vérifie l'équation

$$(p'u)^2 = (2pu + 9)(2pu - 1)(pu - 4).$$

Degré de la courbe. Asymptotes.

Comment évaluera-t-on l'aire comprise entre Ox , la courbe et la droite $x = \frac{1}{4}$?

(Juillet 1908.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Étant considérée l'équation aux dérivées partielles d'ordre n

$$A_0 \frac{d^n z}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1} dy} + \dots + A_n \frac{d^n z}{dy^n} = F,$$

où les A sont des fonctions des variables indépendantes x et y , le second membre F ne contenant que des dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$, comment est-on conduit à la notion de caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles?

2° Étant donnée l'équation aux dérivées partielles de

troisième ordre

$$\frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{d^3 z}{dx^2 dy} = f(x, y),$$

où f est une fonction donnée de x et y , montrer qu'il existe une intégrale et une seule de cette équation, définie dans l'angle xOy , continue ainsi que ses dérivées premières et satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} z &= X_0(x), & \frac{dz}{dy} &= X_1(x) & \text{sur } Ox, \\ z &= Y_0(y), & \frac{dz}{dx} &= Y_1(y) & \text{sur } Oy, \end{aligned}$$

les X et Y satisfaisant pour $x = 0, y = 0$ à des conditions qu'on obtient immédiatement. Qu'arrivera-t-il en général pour les dérivées secondes dans l'angle xOy ?

3° Appliquer le résultat précédent à l'équation

$$\frac{dx dy^2}{d^3 z} + \frac{dx^2 dy}{d^3 z} = 1$$

en supposant que

$$\begin{aligned} X_0 &= 1, & X_1 &= 0, \\ Y_0 &= 1, & Y_1 &= 0, \end{aligned}$$

II. On considère l'équation aux dérivées partielles à trois variables indépendantes :

$$\frac{d_3 u}{dx dy dz} = c(x, y, z)u.$$

Quelle est l'équation adjointe de cette équation et qu'entend-on par solution fondamentale de cette équation adjointe relative au point (x_0, y_0, z_0) ?

Montrer ensuite comment la méthode de Riemann peut être étendue à l'équation (1). Dans le cas où C est constant, former explicitement la solution fondamentale de l'équation adjointe.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^4 z}{dx^4} - 2 \frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} = 0.$$

On commencera par mettre le premier membre sous la forme d'un produit de facteurs, conformément à une théorie générale. (Juillet 1907.)

I. ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Démontrer qu'il existe une fonction continue $\varphi(x)$ et une seule satisfaisant à l'équation

$$(1) \quad \varphi(x) + \int_a^x f(x, s) \varphi(s) ds = \varphi(x),$$

a étant une constante et $f(x, s)$ ainsi que $\psi(x)$ étant des fonctions continues données.

En déduire l'existence d'une solution unique $\varphi(x)$ de l'équation

$$(2) \quad f(x) = \int_0^x \varphi(s) \psi(s, x) ds,$$

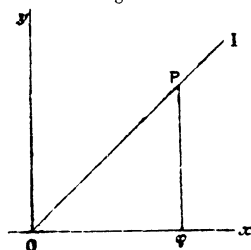
dans l'intervalle $(0, x)$; les deux fonctions continues $f(x)$ et $\psi(s, x)$ sont données. On suppose que $f(x)$ s'annule pour $x = 0$, et que $\psi(x, x)$ est différent de zéro dans l'intervalle indiqué.

2° Étant donnée l'équation

$$(3) \quad \frac{d^2 z}{dx dy} + a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} + cz = 0$$

et une parallèle à Oy rencontrant en P et φ la bissectrice

Fig. 1.

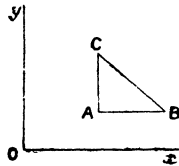


OI ($y = x$) et l'axe Ox , la recherche des intégrales z de cette équation prenant sur OP et sur $O\varphi$ des valeurs données peut se faire en cherchant les valeurs de ses dérivées $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sur OP .

Montrer, en se servant de la méthode de Riemann classique dans la théorie de l'équation (3), que cette recherche revient à l'intégration d'une équation fonctionnelle de la forme (2).

N. B. On rappelle la formule de Riemann, donnant

Fig. 2.



une intégrale de (3) au moyen de sa valeur et des valeurs de ses dérivées premières sur une courbe CB,

$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} + \int_C^B M dy - N dx,$$

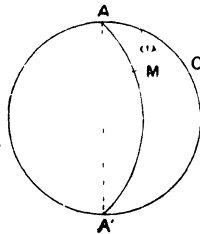
où u désigne la solution fondamentale de l'équation adjointe relative au point A et où l'on a posé

$$M = auz + \frac{1}{2} \left(u \frac{dz}{dy} - z \frac{du}{dy} \right),$$

$$N = buz + \frac{1}{2} \left(u \frac{dz}{dx} - z \frac{du}{dx} \right).$$

2° ÉPREUVE PRATIQUE. — Sur une sphère de rayon 1, on

Fig. 3.



rapporte la position d'un point aux coordonnées polaires ρ et ω relatives à un point A de la sphère et à un grand

(475)

cercle C passant par ce point, de telle sorte que

$$\text{arc AM} = \rho, \quad \text{angle } \widehat{\text{MAC}} = \omega.$$

Trouver l'aire balayée par le rayon vecteur AM quand le point M décrit la courbe représentée par l'équation

$$\omega = 4\rho,$$

ω variant de 0 à 2π .

(Octobre 1907.)