

Concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1909 (mathématiques élémentaires)

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 455-467

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__455_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'AGREGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
EN 1909 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES) (1).**

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I.

Sauf en ce qui concerne le lieu de l'orthocentre P, la question est susceptible d'une solution très élémentaire. (Le lecteur est prié de faire la figure, les deux cercles O et O' étant quelconques, extérieurs toutefois l'un à l'autre, bien entendu.)

On voit d'abord aisément que les droites AC et BD se croisent en K. En effet, si l'on mène d'un point I les deux tangentes IA et ID à un cercle O, et si l'on projette le point I en K sur un diamètre de ce cercle qui laisse A et D d'un même côté, la droite KI est bissectrice de l'angle AKD : la démonstration est immédiate en considérant la circonférence de diamètre OI, qui passe en A, D, K, et en remplaçant les angles en K par des angles en O ; la droite KO' est donc bissectrice de l'angle que forme KD avec le prolongement de KA au delà de K, d'où il suit que ce prolongement se confond avec KC.

On voit de même que les droites A'C' et B'D' se croisent en K. On mène ici les deux tangentes IA' et ID' à un cercle O', et l'on projette le point I en K sur un diamètre de ce cercle qui passe entre A' et D' : la droite KI est bissectrice de l'angle formé par l'une des droites KA', KD' avec le prolongement de l'autre

(1) Voir l'énoncé, p. 426 du présent Tome.

au delà du point K; la droite KO' est donc bissectrice de l'angle des droites KD' , KA' , d'où il suit que KA' se confond avec KC' .

[Les cordes de contact $A'D'$, $B'C'$, AD , BC passent de même au point G; mais on n'aura pas à faire état de ce fait, les points K et G devant jouer dans la suite des rôles différents.]

1° a. Les deux cercles étant d'abord quelconques, les droites AC et $A'C'$ sont rectangulaires; pour que $A'C'$ se confonde avec BD , ces deux droites ayant le point K commun, il est donc nécessaire et suffisant que AC et BD soient rectangulaires; si l'on observe que l'angle \widehat{AKD} est égal à l'angle $\widehat{A'ID'}$, on voit que cette condition équivaut à la suivante : *les tangentes communes intérieures doivent être perpendiculaires aux tangentes communes extérieures, aux points I et J.*

Or, s'il en est ainsi, les cercles orthoptiques des cercles donnés se coupent orthogonalement aux points I et J, puisque l'angle $\widehat{OIO'}$ est droit. Réciproquement, si les cercles orthoptiques des cercles donnés se coupent orthogonalement en deux points que nous appellerons I' et J', les tangentes menées de l'un de ces points aux deux cercles étant $I'\alpha$, $I'\delta$, $I'\delta'$, $I'\alpha'$, on a

$$\widehat{OI'\delta} = \frac{1^d}{2}, \quad \widehat{O'I'\delta'} = \frac{1^d}{2}, \quad \widehat{OIO'} = 1^d,$$

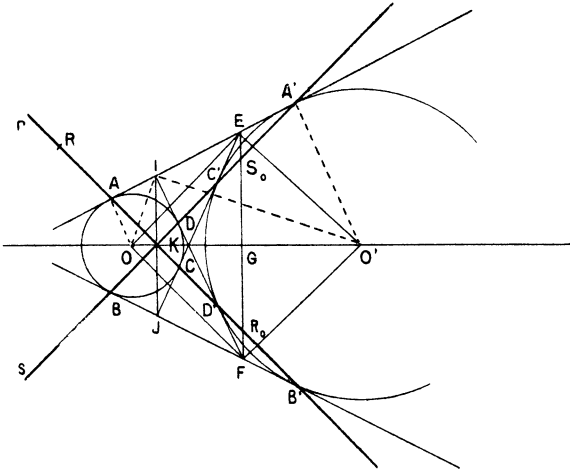
d'où il résulte que les droites $I'\delta$ et $I'\delta'$ sont confondues, ainsi que les droites $I'\alpha$ et $I'\alpha'$; les points I' et J' sont donc les points d'intersection des tangentes communes intérieures avec les tangentes communes extérieures, les premières sont perpendiculaires aux dernières, et la condition requise est vérifiée.

On a la relation métrique

$$\overline{OO'}^2 = 2(R^2 + R'^2).$$

b. Dans l'état général de la figure, le quadrilatère $OEO'F$ a un axe de symétrie OO' , deux angles

Fig. 1.



droits en E et en F, et ses côtés OE, O'F, par exemple, sont perpendiculaires aux cordes de contact AC et B'D'; pour que AC et B'D' se confondent, il faut et il suffit que OE et O'F soient parallèles, ou encore que le quadrilatère OEO'F soit un carré, ou enfin que le point G soit le milieu de OO'. On a alors la figure 1; et l'on peut observer que les triangles OAE, EA'O' sont égaux, ce qui donne la condition *nécessaire*

$$\overline{OE}^2 = R^2 + R'^2 \quad \text{ou} \quad \overline{OO'}^2 = 2(R^2 + R'^2).$$

2° La droite r est la polaire de E par rapport au cercle O, la polaire de F par rapport au cercle O'; si

l'on prend un point R sur la droite r , sa polaire par rapport au cercle O est la perpendiculaire à la droite OR menée par E , sa polaire par rapport au cercle O' est la perpendiculaire à la droite $O'R$ menée par F ; on obtient donc ces deux polaires en faisant tourner les deux droites OR et $O'R$ d'un angle droit autour du point G , de manière à amener le point O en E et le point O' en F ; dès lors, le point d'intersection S de ces deux polaires se déduit du point R par cette même rotation, de sorte que le lieu du point S est la droite s de l'énoncé.

Si R_0 et S_0 sont les points où la droite EF rencontre les droites r et s , on a

$$KR = S_0S, \quad KS = R_0R;$$

si ρ et σ sont les milieux des segments KR_0 et KS_0 , on a $\rho R = \sigma S$.

3° Les angles RKS et RGS étant droits, la circonférence de diamètre RS passe en K et G ; la perpendiculaire à la droite OO' menée par le milieu H du segment KG rencontre donc la droite RS en son milieu T , et la droite GT , médiane du triangle isocèle RGS , est perpendiculaire à la droite RS . Dès lors, l'enveloppe de la droite RS est une parabole ayant pour foyer le point G et pour tangente au sommet la perpendiculaire à la droite OO' menée par H ; la directrice est la droite IJ .

Parmi les couples de points (R, S) se trouvent les couples

$$(R_0, K), \quad (K, S_0), \quad (A, A'), \quad (C, C'), \quad (D', D), \quad (B', B);$$

la parabole est tangente aux droites r et s , aux points R_0 et S_0 ; elle est inscrite au quadrilatère que forment les tangentes communes aux deux cercles. Les

points K, I, J étant sur la directrice, les tangentes issues de ces points sont rectangulaires.

On peut encore observer que la portion RS de la droite RS comprise entre les deux droites rectangulaires Kr et Ks est vue du point G sous un angle droit; dans ces conditions, l'enveloppe de la droite RS est une parabole de foyer G , dont la directrice passe en K .

II.

Les considérations suivantes sont un peu moins élémentaires.

Soient U et V les points de rencontre respectifs des tangentes communes extérieures et des tangentes communes intérieures : le quadrilatère $UIVJ$ étant circonscrit à chacun des deux cercles, les cordes de contact $AC, BD, A'C', B'D'$ passent au point K où se croisent les diagonales. (La considération du quadrilatère $UEVF$ montre de même que les cordes de contact $AD, BC, A'D', B'C'$ passent au point G .)

Les diagonales IJ, EF, UV du quadrilatère complet formé par les tangentes communes déterminent le triangle conjugué commun aux deux cercles : les sommets de ce triangle sont les points K, G , et le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la ligne des centres.

Les deux cercles déterminent un faisceau de cercles dont les cercles de rayon nul ont leurs centres aux points K et G ; l'axe radical est équidistant des droites IJ et EF .

Cela posé, reprenons la solution du problème, avec le lieu de l'orthocentre P .

1° Comme ci-dessus.

2° La polaire du point R par rapport au cercle O passe en E et rencontre la droite s en un point S; le faisceau ER, ES, EA, EC est harmonique. La polaire de S par rapport au cercle O' passe en E, et c'est la droite conjuguée de ES par rapport au système des deux droites EA', EC', ou EA, EC; c'est donc la droite ER. Les points R et S sont donc conjugués par rapport à chacun des deux cercles.

Autrement : les polaires de R par rapport aux cercles du faisceau défini par les deux cercles O et O' sont concourantes; or la polaire de R par rapport au cercle de rayon nul qui a son centre en K est la droite s ; donc....

Ou enfin : le cercle RKG coupant encore la droite s en un point S, comme l'angle RKS est droit, les points R et S sont diamétralement opposés sur ce cercle; comme il est orthogonal à chacun des cercles O et O', puisqu'il passe aux points K et G, les points R et S sont conjugués par rapport à chacun de ces deux cercles.

3° α . Cette dernière démonstration utilise le cercle RKGS qui sert également pour l'enveloppe de la droite RS. L'axe radical des deux cercles donnés est la perpendiculaire à la ligne des centres menés au milieu H du segment KG; cette droite rencontre le diamètre RS du cercle RKGS en un point T qui est le centre de ce cercle, et l'on a

$$\widehat{GTS} = 2\widehat{GKS} = 1^d.$$

Dès lors, l'enveloppe de la droite RS est une parabole ayant pour foyer le point G et pour tangente au sommet l'axe radical des deux cercles; la directrice est la droite IJ.

Cette parabole est la parabole du faisceau tangentiel défini par les deux cercles O et O'; la polaire du point K est la même que pour les deux cercles, c'est la droite EF.

b. Les points R et S étant conjugués par rapport au cercle O, si l'on appelle P le pôle de la droite RS, le triangle PRS est autopolaire, son orthocentre est O, et P est l'orthocentre du triangle ORS (la droite SE, polaire de R, et la droite RF', polaire de S, sont deux hauteurs); dès lors, le lieu de l'orthocentre P du triangle ORS est la conique polaire réciproque, par rapport au cercle directeur O, de la parabole qui est l'enveloppe de la droite RS. Cette conique passe aux points O, E, F, A, B, C, D qui sont les pôles de droites tangentes à cette parabole; les tangentes aux points E et F sont les droites KE et KF. Cette conique est une hyperbole.

Le lieu de l'orthocentre du triangle O'RS est de même une ellipse passant aux points O', E, F, A', B', C', D'; les tangentes aux points E et F sont encore les droites KE et KF, de sorte que cette ellipse est bitangente à l'hyperbole précédente, aux points E et F.

III.

Reste la question de calcul.

La corde des contacts MN des tangentes menées du point R au cercle O passe au point E (*fig. 2*); les angles α et β , compris entre la demi-droite RK et les demi-droites RM, RN, sont égaux aux angles (OE, OM), (OE, ON), et l'on arrive à ce problème bien connu : *Étant donné un cercle O et un point fixe E, on mène par E une sécante variable EMN, et l'on demande la relation entre les angles (OE, OM), (OE, ON). On écrit que les segments OM et OE ont même projection sur la bissectrice OR de l'angle MON, et comme on a posé*

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \widehat{\text{EOR}}, \quad u = \frac{\beta - \alpha}{2} = \widehat{\text{MOR}},$$

qu'on a d'ailleurs

$$\overline{OE}^2 = R^2 + R'^2,$$

cela donne

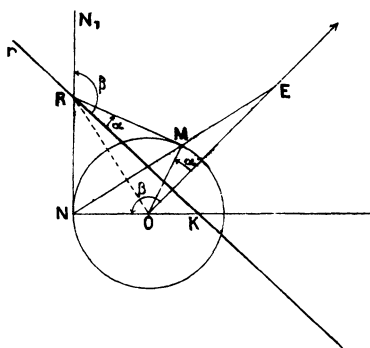
$$(1) \quad R^2 \cos^2 u = (R^2 + R'^2) \cos^2 x,$$

ou

$$\cos^2 u = \left(1 + \frac{R'^2}{R^2} \right) \cos^2 x.$$

De même, la corde des contacts $M'N'$ des tangentes

Fig. 2.



menées du point R au cercle O' passe au point F (*fig. 3*); les angles γ et δ , compris entre la demi-droite RK et les demi-droites RM' , RN'_1 , sont égaux aux angles $(O'F_1, O'M')$, $(O'F_1, O'N')$, et, comme on a posé

$$y = \frac{\gamma + \delta}{2} = \widehat{F_1 O' R}, \quad \nu = \frac{\delta - \gamma}{2} = \widehat{M' O' R}.$$

on a comme ci-dessus

$$(2) \quad R'^2 \cos^2 \nu = (R'^2 + R^2) \cos^2 y,$$

ou

$$\cos^2 \nu = \left(1 + \frac{R^2}{R'^2} \right) \cos^2 y.$$

On a d'autre part (*fig. 4*)

$$\overline{KR} = \overline{KX} + \overline{XR} = \frac{\overline{OK}}{\sqrt{2}} (1 + \operatorname{tang} x),$$

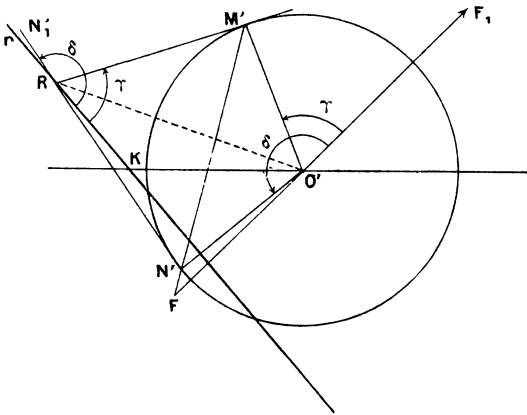
$$\overline{KR} = \overline{KY} + \overline{YR} = \frac{\overline{O'K}}{\sqrt{2}} (1 + \operatorname{tang} y),$$

et, par suite,

$$(3) \quad \frac{1 + \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} y} = \frac{\overline{O'K}}{\overline{OK}} = - \frac{\overline{O'I}}{\overline{OI}^2} = - \frac{R'^2}{R^2}.$$

Cela posé, pour vérifier que les tangentes RM, RN,

Fig. 3.



RM', RN' forment un faisceau harmonique, on doit vérifier la relation

$$\sin(\gamma - \alpha) \sin(\delta - \beta) + \sin(\gamma - \beta) \sin(\delta - \alpha) = 0,$$

ou, en transformant les produits en sommes,

$$\begin{aligned} & \cos(\gamma - \alpha - \delta + \beta) - \cos(\gamma + \delta - \alpha - \beta) \\ & + \cos(\gamma - \beta - \delta + \alpha) - \cos(\gamma + \delta - \alpha - \beta) = 0, \end{aligned}$$

ou, en transformant en produit la somme des deux cosinus de la première colonne,

$$\cos(\gamma - \delta) \cos(\beta - \alpha) - \cos(\gamma + \delta - \alpha - \beta) = 0,$$

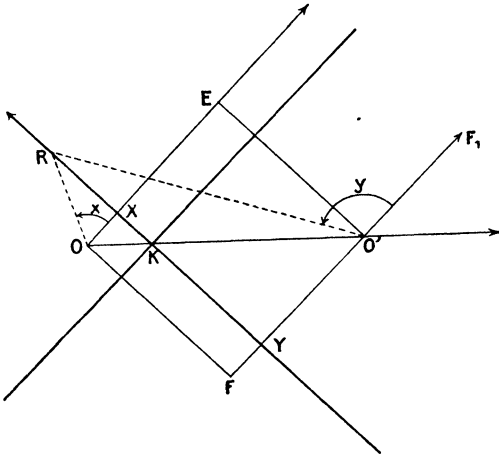
c'est-à-dire

$$\cos 2u \cos 2v - \cos(2\gamma - 2x) = 0,$$

ou encore

$$\cos 2u \cos 2v - \cos 2x \cos 2\gamma - \sin 2x \sin 2\gamma = 0.$$

Fig. 4.



Au moyen des relations (1) et (2), on obtient

$$2 \left(1 + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{R^2}{R'^2} \right) \cos^2 x \cos^2 y - \frac{R'^2}{R^2} \cos^2 x - \frac{R^2}{R'^2} \cos^2 y - 2 \sin x \cos x \sin y \cos y = 0.$$

En vue d'utiliser la relation (3), on divise par le produit $\cos^2 x \cos^2 y$, ce qui donne

$$2 \left(1 + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{R^2}{R'^2} \right) - \frac{R'^2}{R^2} (1 + \operatorname{tang}^2 y) - \frac{R^2}{R'^2} (1 + \operatorname{tang}^2 x) - 2 \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y = 0,$$

ou

$$\left(\frac{R}{R'} + \frac{R'}{R}\right)^2 - \left(\frac{R}{R'} \operatorname{tang} x + \frac{R'}{R} \operatorname{tang} y\right)^2 = 0,$$

ou encore

$$(4) \quad (R^2 + R'^2)^2 - (R^2 \operatorname{tang} x + R'^2 \operatorname{tang} y)^2 = 0.$$

Or la relation (3) peut s'écrire

$$R^2(1 + \operatorname{tang} x) + R'^2(1 + \operatorname{tang} y) = 0$$

ou

$$(R^2 + R'^2) + (R^2 \operatorname{tang} x + R'^2 \operatorname{tang} y) = 0,$$

ce qui assure l'exactitude de la relation (4).

La relation (3) se serait d'ailleurs présentée sous la forme précédente si l'on avait écrit

$$\overline{KX} - \overline{KY} = \overline{YR} - \overline{XR},$$

ou, en multipliant par $\sqrt{2}$,

$$\overline{OK} - \overline{O'K} = \overline{O'K} \operatorname{tang} y - \overline{OK} \operatorname{tang} x;$$

en remplaçant \overline{OK} et $\overline{O'K}$ par les quantités proportionnelles R^2 et $-R'^2$, cela donne en effet

$$R^2 + R'^2 = -(R^2 \operatorname{tang} x + R'^2 \operatorname{tang} y).$$

IV (Complément).

Le lieu des points dont les puissances par rapport à deux cercles ont même valeur absolue et des signes contraires est un cercle ayant son centre au milieu de OO' et dont le rayon r est donné par la formule

$$4r^2 = 2(R^2 + R'^2) - d^2;$$

ce lieu se réduit donc ici au point G. Dès lors, si l'on

mène par le point G deux droites rectangulaires, dont l'une rencontre le cercle O' aux points α' et δ' , tandis que l'autre rencontre le cercle O aux points α et δ , le quadrangle $(\alpha, \delta, \alpha', \delta')$ est un quadrangle orthogonal, puisque l'on a

$$\overline{G\alpha'} \times \overline{G\delta'} = -\overline{G\alpha} \times \overline{G\delta}.$$

En particulier, le quadrangle (A, A', D, D') est un quadrangle orthogonal.

Je signale la propriété suivante, qui m'a été indiquée par M. Ch. Michel : *l'enveloppe des côtés de ce quadrangle autres que ceux qui passent en G est la parabole enveloppe des droites RS* . Il suit de là que les deux points diagonaux de ce quadrangle autres que le point G sont sur la droite IJ , directrice de la parabole considérée.

V.

On appelle *conique covariante de Salmon* la conique F qui est le lieu des points d'où l'on peut mener à deux coniques données deux couples de tangentes formant un faisceau harmonique : cette conique passe par les points de contact des tangentes communes aux deux coniques.

La conique contrevariante de Salmon est de même la conique Φ qui est l'enveloppe des droites divisées harmoniquement par deux coniques données : cette conique touche les tangentes menées aux deux coniques en leurs points d'intersection.

La conique F se réduit à un système de deux droites passant par un sommet du triangle conjugué commun, et en même temps la conique Φ se réduit à un système de deux points situés sur le côté opposé de ce même

triangle, si l'on a

$$\theta\theta' - \Delta\Delta' = 0.$$

Salmon observe que, dans le cas de deux cercles, on doit avoir

$$d^2 = 2(r^2 + r'^2) \quad \text{ou} \quad d^2 = r^2 + r'^2.$$

Le premier cas faisait l'objet de la question proposée et le couple de points Φ est formé de deux points imaginaires situés sur la perpendiculaire à OO' menée par G , à une distance du point G qui a pour valeur $\frac{d}{2} \times i$. Le second cas est celui de deux cercles orthogonaux : si AA' et BB' sont les deux tangentes communes extérieures, les deux droites F sont les cordes de contact AB et $A'B'$, les deux points Φ sont les centres O et O' .