NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L.-A. PAILLARD

Sur la longueur de la circonférence

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 451-454

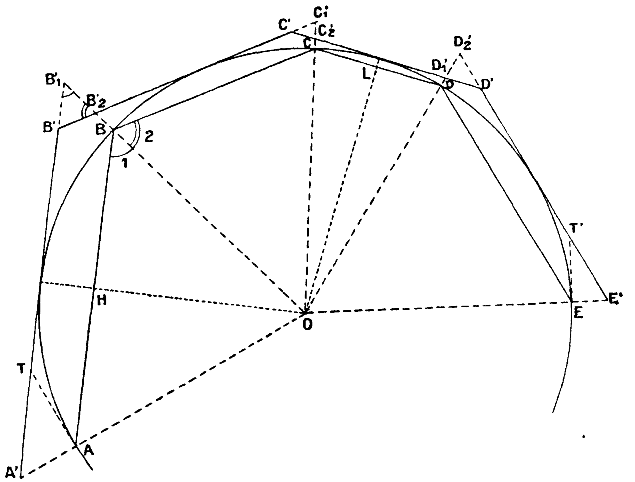
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__451_1>

[$K^1 10c$]

SUR LA LONGUEUR DE LA CIRCONFÉRENCE;

PAR M. L.-A. PAILLARD,
Professeur au Prytanée militaire.

On peut établir l'existence de la longueur de la circonférence de cercle en considérant une ligne brisée convexe quelconque, inscrite dans la circonférence : soit ABCDE inscrite dans l'arc AE. Faisons-lui correspondre la ligne brisée circonscrite A′B′C′D′E′, dont



les côtés sont respectivement parallèles aux côtés de la première, et les extrémités A′ et E′ sur les rayons OA, OE. Ces deux lignes ont un même nombre n de côtés, et soient p_n et p'_n leurs périmètres.

On a toujours

$$p'_n \geqq p_n :$$

il suffit de mener les tangentes AT, ET′ à la circonférence et d'écrire que la ligne brisée convexe ABCDE est plus courte que la brisée enveloppante ATB′C′D′T′E, et que de plus les perpendiculaires AT, ET′ sur les rayons OA, OE sont plus courtes que les obliques A′T, E′T′. De la combinaison de ces trois inégalités résulte l'inégalité

$$AB + BC + CD + DE \leqq A'B' + B'C' + C'D' + D'E',$$

c'est-à-dire

$$p_n \geqq p_n.$$

Soit maintenant une nouvelle ligne brisée convexe inscrite, ayant comme sommets, en plus des points A, B, C, D, E, des points choisis d'une manière quelconque sur l'arc AE donné, et supposons que, dans les brisées successives ainsi obtenues, les angles sous lesquels on voit du centre les différents côtés décroissent indéfiniment et tendent vers zéro, en même temps par conséquent que la longueur de chaque côté (cela entraîne d'ailleurs que n croisse indéfiniment). Il est clair que, de proche en proche, chaque côté d'une brisée est remplacé par une brisée partielle plus longue, et par suite p_n augmente avec n. Il reste d'ailleurs plus petit que la brisée enveloppante AT B'C'D'T'E considérée au début. Il a donc une limite l, inférieure ou égale au périmètre de la ligne brisée ATB'C'D'T'E, d'après un théorème connu d'Arithmétique.

La brisée circonscrite varie d'ailleurs simultanément; nous allons montrer que p'_n a la même limite l, et pour cela, que $\frac{p'_n}{p_n}$ tend vers 1 lorsque n varie dans les conditions énoncées.

Considérons la somme

$$p''_n = A'B'_1 + B'_2C'_1 + C'_2D'_1 + D'_2E',$$

les points B'_1, B'_2, ... étant obtenus par intersection des côtés consécutifs A'B', B'C', ... avec les rayons OB, OC, ..., et supposons par exemple AB > BC dans la brisée donnée. On passe de p'_n à p''_n en enlevant des segments tels que $B'B'_2$ et les remplaçant par d'autres tels que $B'B'_1$. Pour établir l'inégalité $p''_n > p'_n$, il suffit d'établir les inégalités telles que $B'B'_1 > B'B'_2$.

Or, l'hypothèse AB > BC entraîne une inégalité de même sens sur les angles au centre correspondants $AOB > BOC$ et une inégalité en sens contraire sur leurs demi-suppléments $\hat{1} < \hat{2}$; les angles $\hat{1}$ et $\hat{2}$ se reproduisent dans le triangle $B'B'_1B'_2$, et il en résulte

$$B'B'_1 > B'B'_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A'B'_1 + B'_2C'_1 + C'_2D'_1 + D'_2E' &\geqq A'B' + B'C' + C'D' + D'E' \\ &\geqq AB + BC + CD + DE, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{p''_n}{p_n} \leqq \frac{p'_n}{p_n} \leqq 1.$$

Or le rapport $\frac{p''_n}{p_n}$ est compris, d'après un théorème connu d'Arithmétique, entre le plus grand et le plus petit des rapports $\frac{A'B'_1}{AB}$, $\frac{B'_2C'_1}{BC}$, ..., soit entre $\frac{A'B'_1}{AB}$ et $\frac{C'_2D'_1}{CD}$, respectivement égaux à $\frac{R}{OH}$, $\frac{R}{OL}$, c'est-à-dire à $\frac{R}{\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}}$, $\frac{R}{\sqrt{R^2-\left(\frac{CD}{2}\right)^2}}$, et chacun de ces rapports tend évidemment vers 1, puisque les côtés de la ligne brisée inscrite tendent par hypothèse vers zéro. Donc $\frac{p''_n}{p_n}$ a pour limite 1 et de même $\frac{p'_n}{p_n}$. Donc p'_n a une limite, et la même que p_n.

On montrerait d'ailleurs, selon la méthode habituelle, que cette limite est la même quel que soit le choix des sommets successivement ajoutés. Soient, par un autre procédé, P_m, P'_m, tendant vers la limite commune L. On aura évidemment $p_n < P'_m$; donc $l \leqq L$ et de même $P_m < p'_n$; donc $L \leqq l$, ce qui entraîne $l = L$, et cette limite commune est appelée la *longueur* de l'arc considéré.

Plus généralement, et indépendamment des sommets primitifs, la démonstration s'applique à toute suite de brisées convexes inscrites, soumise à la loi énoncée de décroissance des côtés.