B. Hostinsky

Sur un théorème analogue au théorème de Meusnier

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 399-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__399_1>

[O5f]

SUR UN THÉORÈME ANALOGUE AU THÉORÈME DE MEUSNIER;

PAR M. B. HOSTINSKY.

1. Soient (C) un cône quelconque et (T) son plan tangent suivant la génératrice g. Nous appellerons,

d'après Saint-Venant, *cône osculateur* relatif au plan (T) le cône de révolution (K) qui touche trois plans tangents de (C) infiniment voisins du plan (T). Quoiqu'il y ait toujours quatre cônes de révolution tangents à trois plans donnés, le cône (K) sera parfaitement déterminé ; car, si les trois plans deviennent infiniment voisins, un seul de ces quatre cônes admet une figure limite non dégénérée.

Désignons par u, v, w les cosinus directeurs d'un plan et posons

$$(1) \qquad \lambda = \frac{u}{w}, \qquad \mu = \frac{v}{w}.$$

L'équation tangentielle du cône (C) aura la forme

$$(2) \qquad F(\gamma, \mu) = 0.$$

D'autre part, l'équation tangentielle générale d'un cône de révolution concentrique avec (C) sera

$$(3) \qquad (u_0\lambda + v_0\mu + w_0)^2 - \sin^2\varphi(\lambda^2 + \mu^2 + 1) = 0,$$

u_0, v_0, w_0 étant les cosinus directeurs de l'axe et φ l'angle que fait l'axe avec une génératrice.

Exprimons les conditions que le cône (3) touche trois plans tangents consécutifs du cône (2); nous aurons trois équations qui détermineront les rapports des inconnues u_0, v_0, w_0 et $\sin\varphi$ de telle manière que (3) représente le cône (K). Pour cela ajoutons à l'équation (3) les deux équations que l'on obtient en la différentiant deux fois par rapport à μ, λ étant regardé comme fonction de μ définie par l'équation (2).

En particulier, si $z = 0$ est l'équation du plan (T), c'est-à-dire si

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0,$$

on obtient, en faisant le calcul indiqué,

$$(4) \qquad u_0 : v_0 : w_0 = \lambda'^2 + 1 : -\lambda'(\lambda'^2 + 1) : \lambda'',$$

λ' et λ'' étant les valeurs des dérivées pour $\lambda = \mu = 0$.

En tenant compte de l'équation

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 1,$$

on trouve pour l'angle φ la formule

$$(5) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\lambda''}{(\lambda'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Indiquons encore les propriétés suivantes du cône osculateur (K) dont la vérification n'offre aucune difficulté.

Le cône de révolution passant par trois génératrices du cône (C) infiniment voisines de g est identique avec (K).

Un plan (P), perpendiculaire à g, qui coupe (C) suivant la courbe k, rencontre g en un point M et l'axe du cône (K) au centre de courbure de k correspondant au point M.

2. Considérons maintenant une surface quelconque (S).

Soient Ox, Oy les tangentes principales en un point ordinaire O, et R_1, R_2 les rayons de courbure principaux correspondants.

L'équation de (S) s'écrit

$$(6) \qquad z = \frac{1}{2R_1} x^2 + \frac{1}{2R_2} y_2 + \ldots,$$

en négligeant les termes du troisième ordre.

Un plan représenté par

$$ux + vy + wz + p = 0,$$

l'équation tangentielle de (S) peut être mise, dans le voisinage du plan $z = 0$, sous la forme

$$(7) \qquad pw = \frac{R_1}{2} u^2 + \frac{R_2}{2} v^2 + \ldots.$$

L'équation tangentielle, de la forme (2), d'un cône (C) circonscrit à (S) et ayant pour sommet un point $A(\xi, \eta)$ du plan Oxy s'obtient en éliminant, dans l'équation (7), p au moyen de l'équation

$$(8) \qquad u\xi + v\eta + p = 0,$$

ce qui donne, en vertu de (1),

$$(9) \qquad 2\xi\lambda + 2\eta\mu + R_1\lambda^2 + R_2\mu^2 = 0.$$

Cherchons à déterminer le cône osculateur (K) relatif au plan tangent Oxy ($\lambda = 0$, $\mu = 0$) du cône (C). L'équation (9) de (C) différentiée deux fois donne, pour $\lambda = \mu = 0$,

$$(10) \qquad \xi\lambda' = -\eta, \qquad \xi\lambda'' = -R^2 - R_1 \frac{\eta^2}{\xi^2}.$$

L'axe du cône (K) qui touche évidemment le plan Oxy suivant AO sera déterminé, d'après (4), par les formules

$$(11) \qquad u_0 : v_0 : w_0 = \xi(\xi^2 + \eta^2) : \eta(\xi^2 + \eta^2) : -(R_2\xi^2 + R_1\eta^2);$$

il passe donc par le point $Z(0, 0, z_0)$, la troisième coordonnée étant donnée par la formule

$$z_0 = \frac{R_2\xi^2 + R_1\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Le second membre de cette formule ne dépend que du rapport $\xi : \eta$; en d'autres mots, la position du point Z sur la normale ne dépend que de la position de la droite OA ; donc :

Un point quelconque de la droite OA étant pris pour sommet du cône (C′) circonscrit à (S), l'axe du cône osculateur (K′) relatif au plan Oxy passe toujours par le point Z.

Ce théorème est parfaitement analogue au théorème connu de Meusnier. On le voit en exprimant celui-ci comme il suit : Un plan quelconque mené par une droite fixe, tangente en O à la surface (S), coupe (S) suivant une courbe k telle que l'axe du cercle de courbure, correspondant au point O et k, passe par un point fixe de la normale Oz (centre de courbure de la section normale).

La formule (5) qui donne l'angle φ compris entre OA et l'axe du cône osculateur (K) devient, en vertu de (10),

$$\operatorname{tang}\varphi = (R_2\xi^2 + R_1\eta^2)(\xi^2+\eta^2)^{-\frac{3}{2}},$$

et la formule qui donne la courbure d'une section plane en O peut s'écrire

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{u^2}{R_2} + \frac{v^2}{R_1}\right)(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}},$$

u et v étant les cosinus d'angles que fait la normale du plan sécant avec les axes Ox et Oy.