JEAN SERVAIS

Composition d'algèbre et trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 372-377

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__372_0>

COMPOSITION D'ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE;

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

Étant donnée la fonction $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$ *de la variable réelle* x :

I. *Étudier les variations de cette fonction, et les représenter par une courbe.*

II. *Calculer l'intégrale indéfinie* $\int y\,dx$.

III. *Soit* $F(x)$ *l'une quelconque des fonctions primitives de* y :

Trouver trois constantes P, Q, R *telles que la fonction*

$$\Phi(x) = F(x) - Px^2 - Qx - R\log|x|$$

reste finie lorsque x *devient infini. Et prouver qu'il n'y a qu'un seul système de valeurs des constantes* P, Q, R *satisfaisant à cette condition.*

NOTA. — *La notation* $\log|x|$ *désigne le logarithme népérien de la valeur absolue de* x.

IV. *Les constantes* P, Q, R *étant celles qui satisfont à la condition précédente, et* $F(x)$ *désignant la fonction*

$$F(x) = \int_8^x y\,dx,$$

déterminer, d'une manière précise, ce que devient la fonction $\Phi(x)$, *lorsque* x *devient infini.*

I. Pour étudier la variation de

$$y = \sqrt[3]{x^2(x-6)},$$

calculons la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}};$$

on a alors le Tableau de variation suivant :

x.	$\frac{dy}{dx}$.	y.
$-\infty$	1	$-\infty$
	$+$	croît
0	$\frac{+\infty}{-\infty}$	0
	$-$	décroît
4	0	$-2\sqrt[3]{4}$ (min.)
	$+$	croît
$+\infty$	1	$+\infty$

La courbe représentative se déduit immédiatement de ce Tableau.

En extrayant la racine cubique de $x^3 - 6x^2$, on a

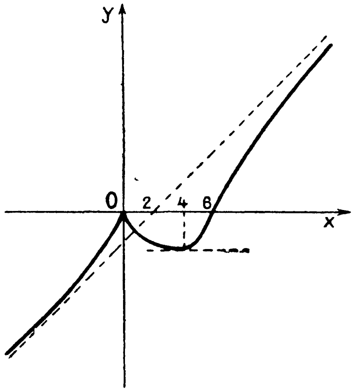
$$y = x - 2 - \frac{4}{x} + \ldots,$$

qui prouve que la courbe admet pour asymptote la droite

$$y = x - 2,$$

est au-dessus de cette asymptote pour $x = -\infty$, et au-dessous pour $x = +\infty$.

La courbe a un rebroussement à l'origine avec tangente verticale; elle coupe Ox au point d'abscisse $x = 6$. Elle a la forme ci-jointe (*fig.* 4).



II. La courbe est une cubique à rebroussement, donc *unicursale*.

Posons

$$y = tx$$

Il vient

$$x = \frac{6}{1 - t^3}.$$

L'intégrale s'écrit

$$I = \int y\,dx = \int tx\,dx = \frac{tx^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\,dt,$$

$$I = \frac{18t}{(t^3 - 1)^2} - 18\int \frac{dt}{(t^3 - 1)^2}.$$

Pour décomposer $\frac{1}{(t^3 - 1)^2}$ en fractions simples, désignons par α une racine cubique de l'unité et posons

$$t = \theta + \alpha,$$

$$\frac{1}{(t^3 - 1)^2} = \frac{1}{(\theta^3 + 3\theta^2\alpha + 3\alpha^2\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2}\,\frac{1}{9\alpha + 18\theta + \ldots},$$

$$\frac{1}{(t^3 - 1)^2} = \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\alpha^2}{9} - \frac{2\alpha}{9}\theta + \ldots\right).$$

La partie relative à la racine α est donc

$$\frac{\alpha^2}{9(t-\alpha)^2} - \frac{2\alpha}{9(t-\alpha)}.$$

Les racines étant $1, j$ et j^2, avec

$$1 + j + j^2 = 0,$$

on a donc, en faisant $\alpha = 1$, $\alpha = j$ et $\alpha = j^2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(t^3-1)^2} = {} & \frac{1}{9}\left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{j^2}{(t-j)^2} + \frac{j}{(t-j^2)^2}\right] \\ & -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{j}{t-j} + \frac{j^2}{t-j^2}\right).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(t^3-1)^2} = {} & -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{j^2}{t-j} + \frac{j}{t-j^2}\right) \\ & -\frac{1}{9}\log(t-1)^2 - \int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt.\end{aligned}$$

Toutes simplifications faites, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(t^3-1)^2} = {} & -\frac{1}{3}\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{9}\log\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} \\ & + \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arc\,tang}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

On en conclut

$$\mathrm{I} = \frac{18t}{(t^3-1)^2} + \frac{6t}{t^3-1} - 2\log\frac{t^3-1}{(t-1)^3} - 4\sqrt{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

ou

$$\begin{aligned}\int y\,dx = {} & \frac{xy}{2} - y + 2\log\left|\left(\frac{y}{x}-1\right)^3 x\right| \\ & -4\sqrt{3}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\frac{y}{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{C},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int y\,dx = {} & \frac{xy}{2} - y - 4\log|x| + 2\log|(y-x)^3| \\ & -4\sqrt{3}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\frac{y}{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

III. Remplaçons y par les premiers termes de son développement :

$$y = x - 2 - \frac{4}{x};$$

il vient

$$\int y\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ldots - 4\log|x| + 2\log\left|\left(2 + \frac{4}{x} + \ldots\right)^3\right|$$
$$- 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(\frac{3 - \frac{4}{x} - \ldots}{\sqrt{3}}\right),$$

les termes négligés tendant vers zéro quand x croît indéfiniment.

On peut donc écrire

$$\int y\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 4\log|x| + \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ restant fini quand x croît indéfiniment.

On a donc

$$P = \frac{1}{2}, \qquad Q = -2, \qquad R = -4.$$

Ces valeurs de P, Q, R sont uniques, car, si l'on a

$$\int y\,dx = P x^2 + Q x + R \log|x| + \Psi(x),$$

on en déduit

$$\left(P - \frac{1}{2}\right)x^2 + (Q + 2)x + (R + 4)\log|x| = \Psi(x) - \Phi(x).$$

Le second membre restant fini, le premier membre ne peut rester fini que si l'on a séparément

$$P - \frac{1}{2} = 0, \qquad Q + 2 = 0, \qquad R + 4 = 0,$$

puisque les rapidités de croissance de x^2, x et $\log|x|$ sont différentes.

IV. On a

$$\int_3^x y\,dx = \frac{xy}{2} - y - 4\log|x| + 2\log|(y-x)^3|$$
$$- 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(\frac{2\frac{y}{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{9}{2} - 3$$
$$+ 4\log 3 - 2\log 6^3 + 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ou, en remplaçant y par son développement,

$$\int_3^x y\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 4\log|x| + 6\log|2+\varepsilon|$$
$$- 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}(\sqrt{3}+\varepsilon') + \varepsilon'' + \frac{3}{2} + 4\log 3$$
$$- 6\log 6 + 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

d'où

$$\Phi(x) = 6\log|2+\varepsilon| - 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}(\sqrt{3}+\varepsilon') + \varepsilon''$$
$$+ \frac{3}{2} - 2\log 3 - 6\log 2 + 4\sqrt{3}\,\text{arc tang}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

ε, ε', ε'' tendant vers zéro quand x croît indéfiniment, on a

$$\lim_{x=\infty}\Phi(x) = \frac{3}{2} - 2\log 3 - 2\pi\sqrt{3}.$$