Philbert du Plessis

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1909. Composition de géométrie analytique et mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 361-371

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__361_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1909.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

Solution par M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère une hélice (H) *tracée sur un cylindre de révolution ayant* Oz *pour axe. Soient* a *le rayon du cercle de base et* h *le pas réduit, c'est-à-dire que* $2\pi h$ *est la longueur interceptée par deux spires consécutives sur toute génératrice du cylindre. Sur l'hélice* (H) *on prend deux points* L *et* N, *et l'on considère le centre de gravité* G *de l'arc* LN *supposé homogène.*

I. *On suppose que l'arc* LN *varie en conservant le même milieu* M.

Démontrer que, dans ces conditions, le point G *décrit une droite rencontrant normalement* Oz.

II. *On demande le lieu du point* G, *quand l'arc* LN *varie de telle manière que la* corde LN *reste parallèle à un plan fixe quelconque.*

III. *Appelons* (S) *la surface lieu du point* G *lorsque* L *et* N *varient arbitrairement sur l'hélice. Montrer que le plan tangent en* G *à la surface* (S) *n'est autre que le plan* π *mené par les extrémités* L, N *de l'arc et par son milieu* M.

Comment varie ce plan tangent lorsque l'arc varie en conservant le même milieu?

IV. *On suppose que chaque élément ds de l'arc* LN *attire un point fixe,* P, *proportionnellement à la distance r de ce point à l'élément, et proportionnellement à la longueur ds elle-même, en sorte que l'attraction exercée par l'élément ds sur le point* P *a pour expression* $\mu r\,ds$, *où* μ *désigne une constante positive.*

On demande de démontrer que les attractions exercées sur le point P *par l'ensemble des éléments ds ont pour résultante une force finie* F *dirigée vers le point* G.

Dire quelle est l'expression de cette résultante F.

V. *Avec quelle vitesse faudrait-il lancer le point* P *à partir du point* L *pour qu'il décrive, sous l'influence de la force* F, *le cercle* Ω *qui a pour centre le point* G *et qui passe non seulement au point* L, *mais encore au point* N.

I. Si l'on considère un arc LN d'une hélice tracée sur un cylindre *absolument quelconque* dont les génératrices sont parallèles à Oz, on remarque d'abord que, puisque le rapport de tout élément de cet arc à sa projection sur Oxy est constant, la projection du centre de gravité G sur le plan Oxy coïncide avec le centre de gravité g de la projection ln de l'arc sur ce même plan.

D'autre part, si l'on déforme arbitrairement la section droite du cylindre (supposée, bien entendu, inextensible), le z du centre de gravité G de l'arc LN ne change pas. Or, lorsque la section droite est devenue rectiligne, ce centre de gravité vient au milieu du segment LN devenu lui-même rectiligne. Donc le z de G est le même que celui du milieu M de LN.

Cette double propriété, *indépendante, comme on le voit, de la forme de la section droite du cylindre,* montre, lorsque cette section droite est un cercle de centre O, que le point G se projette au centre de gravité g de l'arc de cercle ln, situé sur la bissectrice Om de l'angle lOn (*fig.* 1) à une distance de O telle que

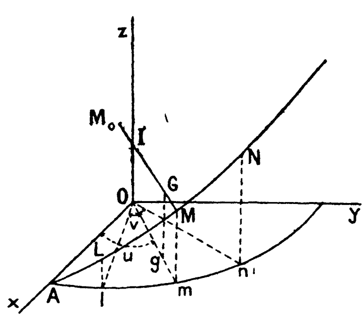
$$\text{(1)} \qquad Og = a\,\frac{\sin v}{v},$$

et de plus que

$$\text{(2)} \qquad gG = mM = hu.$$

Le lieu de G, lorsque M est fixe, est donc la parallèle

Fig. 1.



à Om menée par M, c'est-à-dire *la perpendiculaire abaissée de* M *sur* Oz. On voit en même temps que les coordonnées ξ, η, ζ de G sont

$$(3)\quad \xi = \frac{a \sin v}{v} \cos u, \qquad \eta = \frac{a \sin v}{v} \sin u, \qquad \zeta = hu.$$

Mais ce premier résultat appelle une discussion.

Nous venons, en effet, en désignant par I le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Oz, de voir que

$$\mathrm{IG} = \frac{a \sin v}{v}.$$

Or, lorsque v varie, le rapport $\frac{\sin v}{v}$ reste compris entre la valeur $+1$, correspondant à $v = 0$, et un minimum négatif correspondant à la plus petite valeur, non nulle, v_0 de v qui annule la dérivée de ce rapport, c'est-à-dire telle que

$$(4)\qquad v_0 = \operatorname{tang} v_0.$$

Cette équation pouvant s'écrire

$$\frac{\sin v_0}{v_0} = \cos v_0,$$

on voit que la valeur correspondante a_0 de IG est donnée par

$$a_0 = a \cos v_0,$$

valeur inférieure à a et négative, car v_0 est compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$ (¹). Appelons M_0 cette seconde position limite de G.

(¹) Cela se voit immédiatement en remarquant que $\frac{\sin v}{v}$ est le coefficient angulaire de la droite unissant l'origine au point $x = v$ de la sinusoïde $y = \sin x$. Les maxima et minima de ce rapport sont donc donnés par les coefficients angulaires des tangentes menées de O à cette sinusoïde. La première de ces tangentes, après

Ainsi tous les points G correspondant à un point M donné se trouvent, sur la perpendiculaire MI à Oz, *entre les points* M *et* M_0.

Lorsqu'on fait varier le point M, la droite MM_0 engendre une *surface de vis à filet carré* sur laquelle nous distinguerons les filets $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0$ engendrés respectivement par les vecteurs IM et IM_0.

Le lieu complet du point G [surface (S) de l'énoncé] se compose donc de l'ensemble de ces deux filets.

II. Le point G se trouve d'abord sur cette surface de vis (S) dont l'équation, obtenue par élimination de u et v entre les équations (3), s'écrit immédiatement

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{z}{h}. \tag{5}$$

Si la courbe LN est astreinte à une condition particulière, le point G doit, en outre, se trouver sur une seconde surface dont l'intersection avec la précédente constitue le lieu de ce point. Cherchons cette seconde surface lorsque LN reste parallèle à une même direction de plan ou, ce qui revient au même, orthogonale à une même direction de droite OK définie par ses angles polaires φ et ψ (*fig.* 2).

Les cosinus directeurs de OK sont donc

$$\sin\psi\cos\varphi, \qquad \sin\psi\sin\varphi, \qquad \cos\psi.$$

---

celle dont le point de contact est en O même, a un point de contact voisin du point $x = \frac{3\pi}{2}$ et un peu en avant de ce point. Le calcul montre qu'on a, à moins de 1″ près, $v_0 = 257°27'12''$, ce qui donne $IM_0 = a\cos v_0 = -0,21724\,a$.

Ceux de LN sont proportionnels à

$$a[\cos(u+v)-\cos(u-v)],\qquad a[\sin(u+v)-\sin(u-v)],$$
$$h[u+v-(u-v)]$$

ou

$$-a\sin u\sin v,\quad a\sin v\cos u,\quad hv,$$

ou encore, eu égard à (3),

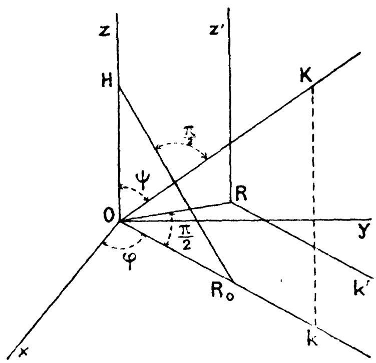
$$-\eta v,\quad \xi v,\quad hv.$$

La condition d'orthogonalité de LN et de OP s'écrit donc, après division par $v\sin\psi$,

$$-\eta\cos\varphi+\xi\sin\varphi+h\cos\psi=0.$$

Et la seconde surface, dont l'intersection avec (S

Fig. 2.



donne le lieu de G cherché, est donc le plan

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi+h\cot\psi=0. \tag{6}$$

Mais, ici encore, il faut remarquer que le lieu effectif de G ne comprend pas l'intersection complète du plan (6) et de la surface (5), mais seulement la partie de cette intersection qui se trouve sur les filets $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0$ ci-dessus définis.

Pour se rendre compte de la nature de cette intersection, remarquons qu'on peut toujours disposer des axes de façon que $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. L'équation (6) se réduit alors à

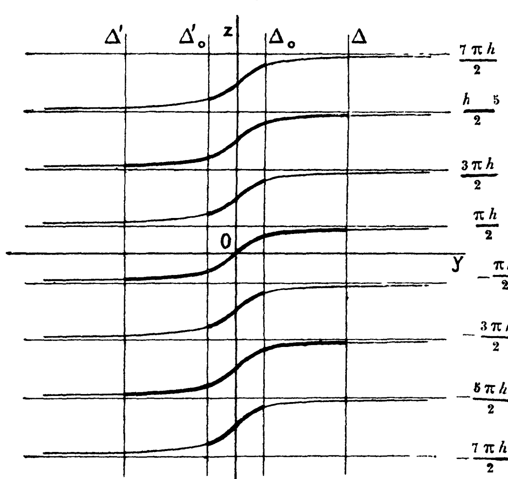
$$(6') \qquad x = h \cot \psi,$$

et l'équation de l'intersection dans son propre plan peut s'écrire

$$y = h \cot \psi \operatorname{tang} \frac{z}{h}.$$

C'est une *tangentoïde* à asymptotes horizontales, équidistantes de πh (*fig.* 3). De deux en deux ses

Fig. 3.



branches infinies correspondent au filet $\mathcal{F}$, les branches intermédiaires au filet $\mathcal{F}_0$. Les portions effectives sur les unes et les autres sont réelles si la distance de l'origine au plan sécant (6′), c'est-à-dire $h \cot\psi$, est inférieure au rayon du cylindre limitant le filet correspondant, a pour $\mathcal{F}$ et $a_0 = 0{,}217\,a$ pour $\mathcal{F}_0$.

En projection sur Oyz, les parallèles à Oz, Δ et Δ' d'une part, Δ_0 et Δ'_0 de l'autre, limitant les portions effectives du lieu, sont données par

$$y = \pm\sqrt{a^2 - h^2 \cot^2\psi} \qquad \text{et} \qquad y = \pm\sqrt{a_0^2 - h^2 \cot^2\psi}.$$

Remarque. — La construction géométrique du plan (6) est des plus simples (*fig.* 2).

D'abord la trace du plan (6) sur Oxy est parallèle à la projection Ok de OK sur ce plan; puis si, sur Oz, on porte $OH = h$ et que de H on abaisse sur OK la perpendiculaire HR_0, qui coupe Ok en R_0, on a

$$OR_0 = h \cot\psi$$

et, par suite, OR_0 est égal à la distance du plan (6) à l'origine. Mais, pour effectuer cette construction avec précision, il faut avoir égard au signe : ayant porté OH, sur Oz, dans le sens positif ou dans le sens négatif suivant que l'hélice est *dextrorsum* (*fig.* 1) ou *sinistrorsum*, on n'aura, dans tous les cas, qu'à faire tourner OR_0 d'un angle droit *dans le sens direct* (de Ox vers Oy) pour avoir la distance OR de l'origine au plan (6). Ce plan est alors obtenu en menant par R un plan $k'Rz'$ parallèle à kOz.

III. Si l'une des extrémités L d'un arc LN d'une courbe *quelconque* reste fixe, alors que l'autre N varie, la tangente à la courbe décrite par le centre de gravité G de l'arc passe constamment par le point N. Ce théorème bien connu est à peu près évident. Si, en effet, on fait croître l'arc LN d'un arc infiniment petit NN′, la droite sur laquelle se trouve le centre de gravité de l'arc total LN', obtenue en joignant le centre de gravité G de LN au centre de gravité de NN', sensiblement confondu avec le milieu de NN', coïncide à la limite avec GN. Cette droite GN appartient donc au plan tangent en G à la surface (S); de même pour GL. Le plan tangent en G n'est donc autre que le plan GLN, et l'on voit que ce théorème est vrai pour une courbe gauche quelconque.

Dans le cas de l'hélice, ce plan GLN contient aussi le point M, puisque les points L et N sont symétriques par rapport à la droite MG.

Il est, au reste, bien facile de vérifier ce théorème dans le cas de l'hélice. Nous venons de voir que la surface (S), engendrée par la droite MI, est une surface de vis à filet carré. Le plan tangent en G à cette surface est déterminé par la génératrice GM et la tangente en G à l'hélice de la surface passant en ce point. Pour démontrer le théorème il suffit de faire voir que cette tangente est parallèle à la droite LN qui, d'autre part, rencontre MG, ou, ce qui revient au même, que ces deux droites ont même pente sur le plan Oxy, puisque déjà elles sont toutes deux perpendiculaires à IM.

Or, la pente de la tangente à l'hélice décrite par M étant $\frac{h}{a}$, celle de la tangente à l'hélice décrite par G est $\frac{h}{a}\frac{\text{IM}}{\text{IG}}$ ou $\frac{hv}{a\sin v}$.

D'autre part, la pente de LM est donnée par $\frac{n\text{N}-l\text{L}}{ln}$ ou $\frac{2hv}{2a\sin v}$; ces deux pentes sont bien les mêmes.

Si le point M reste le même, le point G décrivant la droite IM qui appartient toujours au plan tangent, celui-ci pivote autour de cette droite et sa pente sur Oxy varie en raison inverse de IG (loi de Chasles). Mais ce plan a, lui aussi, deux positions limites en M et en M_0, qui sont les plans osculateurs aux hélices correspondantes en ces points.

IV. Si nous représentons par ρ la distance du point P à un point variable sur l'hélice, les composantes X, Y, Z de l'attraction exercée par l'arc LN sur l'unité de masse placée au point P, de coordonnées x_1, y_1, z_1, sont données par

$$X = \int \mu\rho\, ds \frac{x - x_1}{\rho} = \mu \int (x - x_1)\, ds,$$
$$Y = \mu \int (y - y_1)\, ds,$$
$$Z = \mu \int (z - z_1)\, ds,$$

les intégrales étant étendues du point L au point N. Or, les coordonnées ξ, η, ζ de G satisfont aux équations

$$s\xi = \int x\, ds, \qquad s\eta = \int y\, ds, \qquad s\zeta = \int z\, ds.$$

Il vient donc

$$X = \mu s(\xi - x_1), \qquad Y = \mu s(\eta - y_1), \qquad Z = \mu s(\zeta - z_1),$$

composantes de l'attraction

$$F = -\mu s r,$$

exercée par la masse μs, concentrée en G, sur l'unité de masse placée au point P, en raison directe de la distance r; et l'on voit que cette propriété a lieu, dans les mêmes conditions, pour un arc de *courbe quelconque*.

V. On sait que le point mobile P, attiré par le point G, en raison directe de la distance r, décrit, suivant la loi des aires, dans le plan déterminé par le point G et la vitesse initiale, une ellipse, de centre G, ayant pour diamètres conjugués : 1° la distance initiale GL $= r_0$; 2° le vecteur mené par G parallèlement à la vitesse initiale v_0 et égal à $\frac{v_0}{\sqrt{\mu s}}$ (question de cours).

Il est, au reste, bien simple d'établir ce résultat. Plaçant, dans le plan de G et de la vitesse initiale, l'origine en G, les axes étant d'une part GL, de l'autre la parallèle à la vitesse initiale, on a, comme équations différentielles du mouvement,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu s x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu s y,$$

dont, en tenant compte des conditions initiales, on peut immédiatement écrire les intégrales

$$x = r_0 \cos\sqrt{\mu s}\,t, \qquad y = \frac{v_0}{\sqrt{\mu s}} \sin\sqrt{\mu s}\,t,$$

d'où l'équation de la trajectoire

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{\mu s y^2}{v_0^2} = 1,$$

qui sera un cercle si les axes sont rectangulaires et si

$$v_0^2 = \mu s r_0^2.$$

Donc, si la vitesse initiale ayant cette valeur est dirigée, dans le plan GLN, perpendiculairement à GL, la trajectoire de P sera un cercle de centre G, décrit d'un mouvement uniforme en vertu de la loi des aires ; et ce cercle passera par le point N, car, d'après la détermination de G donnée au paragraphe I, il est évident que GL = GN.