NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. BUHL

Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures (seconde note)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 337-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__337_0>

[O'5j]

SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SE DÉTERMINENT PAR QUADRATURES

(SECONDE NOTE).

PAR M. A. BUHL.

1. Ce travail fait suite à celui que j'ai publié ici même en octobre 1908. J'avais d'abord uniquement en vue de résumer des conférences d'agrégation faites à Montpellier, et je pense que la lecture de ce qui suit peut être encore utile aux candidats; mais, à côté du point de vue pédagogique, j'ai trouvé dans le sujet plus d'intérêt que je n'en voyais d'abord, et je crois nouveaux certains de mes résultats.

L'étude des lignes asymptotiques des surfaces

$$\Phi(z) = a\theta + F(r) \tag{1}$$

a surtout été faite en particularisant la fonction Φ; c'est ainsi qu'on rattache facilement au type (1) les surfaces hélicoïdales et spirales. J'ai essayé inversement de particulariser F en conservant la généralité de Φ.

Bien qu'ayant maintenu le titre du premier article, j'ai rencontré des surfaces dont les asymptotiques dépendent d'équations différentielles non réductibles aux quadratures. C'est d'ailleurs le cas général pour les surfaces (1), et je ne fais qu'étudier des cas particuliers de réductibilité; il est naturel qu'ils soient situés entre des cas irréductibles.

2. Les surfaces précédemment considérées étaient définies par la considération de l'ordonnée et de la normale en un point M ; ces droites perçant yOx en des points m et n, le triangle Omn devait avoir une aire ne dépendant que de l'ordonnée $z = \mathbf{M}m$. Partant de là on trouvait sans peine pour équation de ces surfaces

$$\Phi(z) = a\theta + F(r), \tag{1}$$

z, r, θ représentant des coordonnées semi-polaires, a étant une constante arbitraire, F et Φ des fonctions arbitraires. Il avait été mentionné dans le précédent article que les surfaces (1) contenaient, comme cas particuliers, les conoïdes, les surfaces de révolution, les hélicoïdes et les surfaces spirales.

Remarquons qu'à la première définition des surfaces (1) on peut immédiatement en adjoindre une seconde; ces surfaces sont engendrées par une courbe *arbitraire* $a\theta + F(r) = 0$ dont le plan, constamment normal à Oz et percé au même point par cet axe, tourne autour de Oz suivant une loi dépendant d'une manière *quelconque* de son ordonnée.

Sans rien particulariser, j'ai donné pour première équation des asymptotiques de (1)

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(F'' - F'^2 \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr^2 \\ &\qquad - 2a\left(\frac{1}{r} + F'\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr\,d\theta + \left(rF' - a^2\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) d\theta^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation suppose qu'on peut porter dans $\frac{\Phi''}{\Phi'^2}$ la valeur de z tirée de (1). Elle définit alors, en coordonnées polaires, la projection des asymptotiques sur yOx. L'élimination de z est évitée de façon avantageuse si l'on élimine θ entre (1) et (2). Il vient alors

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{F}'' + \frac{2}{r}\mathrm{F}' + \frac{r}{a^2}\mathrm{F}'^3\right) dr^2 \\
&\quad - 2\left(\frac{1}{r}\Phi' + \frac{r}{a^2}\mathrm{F}'^2\Phi'\right) dr\,dz + \left(\frac{r}{a^2}\mathrm{F}'\Phi'^2 - \Phi''\right) dz^2 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette équation a sur (2) l'avantage de ne contenir explicitement que les deux variables r et z; elle définit deux familles de surfaces de révolution coupant la surface (1) suivant les deux familles d'asymptotiques. On peut encore la simplifier en posant

$$
(4)\qquad \Phi'' = \Phi'^2 f(\Phi),
$$

ce qui revient à supposer que la fonction arbitraire Φ est définie par l'intermédiaire d'une fonction f au moyen de la formule

$$
(5)\qquad z = \int e^{-\int f(\Phi)\,d\Phi}\, d\Phi,
$$

d'où l'on doit finalement tirer Φ en fonction de z.

Alors (3) devient

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{F}'' + \frac{2}{r}\mathrm{F}' + \frac{r}{a^2}\mathrm{F}'^3\right) dr^2 \\
&\quad - 2\left(\frac{1}{r} + \frac{r}{a^2}\mathrm{F}'^2\right) dr\,d\Phi + \left[\frac{r}{a^2}\mathrm{F}' - f(\Phi)\right] d\Phi^2 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

N'était la présence du seul terme $f(\Phi)$, l'équation serait d'un type banal immédiatement intégrable par quadratures et, cependant, si l'on conserve ce terme, elle paraît défier toutes les méthodes élémentaires d'intégration. Bien plus, comme je l'ai montré dans mon précédent article, les seuls cas particuliers où l'on se ramène *immédiatement* aux quadratures en faisant de $f(\Phi)$ une constante nulle ou non nulle conduisent aux hélicoïdes et à des surfaces comparables aux surfaces spirales, d'où les résultats bien connus quant aux asymptotiques.

Faut-il donc renoncer à quelque chose de général concernant l'équation (6)? Le problème paraît fort difficile, bien que son intérêt, ainsi mis en lumière, ne soit pas douteux.

Je n'ai pu aller bien loin dans l'étude des généralités, mais je crois avoir trouvé quelques résultats particuliers dignes d'être ajoutés à ceux que l'on possède déjà.

Examinons d'abord le discriminant qui, toutes réductions faites, peut s'écrire

$$\Delta = \frac{1}{r^2} - \frac{r}{a^2} F' F'' + f(\Phi) \left(F'' + \frac{2}{r} F' + \frac{r}{a^2} F'^3 \right).$$

Toutes ses simplifications simplifient évidemment l'équation (6) et nous serons ainsi conduits à examiner les surfaces (1) où, la fonction $\Phi(r)$ restant quelconque, la fonction $F(r)$ satisfera à l'une ou à l'autre des équations différentielles

$$F'' + \frac{2}{r} F' + \frac{r}{a^2} F'^3 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{r}{a^2} F' F'' = 0. \tag{8}$$

Nous étudierons d'abord l'équation (7), étude qui nous conduira à des comparaisons concernant les conoïdes droits; c'est pourquoi le paragraphe suivant est consacré à ces conoïdes.

3. *Retour sur les conoïdes.* — Pour les conoïdes droits $\Phi(z) = a\theta$, l'équation (3) donne immédiatement pour les asymptotiques distinctes des génératrices

$$r^2 \Phi'(z) = \text{const.} \tag{9}$$

Cette équation exprime, comme je l'ai remarqué antérieurement, que, *le point* M *décrivant une asymptotique sur le conoïde, le rayon vecteur* O*m balaye des aires dont la variation est proportionnelle à celle de l'ordonnée m*M.

Or c'est là la propriété caractéristique des courbes dont la tangente appartient à un complexe linéaire, l'axe de ce complexe étant Oz [P. Appell, *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (*Annales de l'École Normale,* 1876, p. 265)]. On voit qu'il est indifférent de désigner ainsi ces courbes ou de dire que ce sont les asymptotiques d'un conoïde droit. Le plan osculateur qui a son foyer au point d'osculation est évidemment le plan tangent au conoïde. Ces considérations ont été reprises par M. E. Picard dans son *Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (*Annales de l'École Normale,* 1877, p. 329). Les mêmes courbes ont été étudiées par d'autres auteurs, par exemple par M. E. Goursat (*Traité d'Analyse,* t. I, p. 518), chacun les représentant par des équations différentes. Ici nous avons

$$\Phi(z) = a\theta, \qquad r^2\,\Phi'(z) = C.$$

Si l'on imagine qu'on tire de la première équation $z = \varphi(\theta)$, le tout se transforme immédiatement en

$$z = \varphi(\theta), \qquad x = \sqrt{C\,\varphi'(\theta)}\cos\theta, \qquad y = \sqrt{C\,\varphi'(\theta)}\sin\theta.$$

C'est une forme donnée encore par M. Appell (*Traité de Mécanique rationnelle,* Exercices du Chap. I).

Bien que je ne puisse faire ici une bibliographie complète du sujet, il me semble particulièrement intéressant de mentionner que, dans le présent Volume

(p. 35), en janvier 1909, c'est-à-dire entre le présent Mémoire et le précédent, M. E. Keraval est revenu sur les courbes précédentes d'une manière pleine d'intérêt. Il les considère aussi comme situées à la fois sur des conoïdes et sur des surfaces de révolution.

Ces résultats étant rappelés, nous allons voir comment ils se généralisent sur de certaines surfaces qui sont elles-mêmes des généralisations de conoïdes.

4. *Asymptotiques d'une surface réglée à plan et à cylindre directeurs.* — Prenons la surface (1) pour laquelle la fonction $F(r)$ serait définie par l'équation (7). Il est facile, sans calcul, de prévoir quelle surface on doit obtenir.

Si (7) a lieu, l'équation (3) nous montre que la surface en litige est coupée suivant une famille d'asymptotiques par tous les plans parallèles à Oxy. Or, en général, des asymptotiques ne peuvent être planes, à moins qu'elles ne soient droites. La surface (1) doit donc se réduire à une surface réglée ayant Oxy pour plan directeur. De plus, d'après les généralités du n° 2, la surface doit être engendrée par une section plane parallèle à Oxy, dont l'ordonnée varie cependant que cette section tourne, suivant une loi quelconque dépendant de z, autour de Oz.

C'est dire que les génératrices de la surface doivent être aussi tangentes à un cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon arbitraire k.

Analytiquement, l'équation (7) s'intègre très facilement en la multipliant par F' et en prenant F'^2 pour fonction inconnue. On a ainsi

$$F' = \frac{ak}{r\sqrt{r^2 - k^2}}, \qquad F = a \operatorname{arc} \cos \frac{k}{r},$$

d'où la surface

$$\Phi(z) = a\theta + a \operatorname{arc} \cos \frac{k}{r}.$$

On peut supposer que la seconde constante d'intégration rentre dans $\Phi(z)$ et qu'il en est de même pour la constante a. Pour $a = 1$ on a donc finalement

$$(10) \qquad r \cos[\theta - \Phi(z)] = k,$$

ce qui est bien la surface prévue. $\Phi(z)$ est l'argument de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de Oz sur la génératrice de même cote.

Si l'on porte l'expression trouvée pour F dans l'équation (3), on obtient

$$\frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2 - k^2}} \Phi' - \left(k\Phi'^2 - \Phi'' \sqrt{r^2 - k^2}\right) dz = 0,$$

ce qui doit définir pour la surface (10) les asymptotiques différentes des génératrices.

Posant

$$R^2 = r^2 - k^2,$$

il vient

$$\frac{dR}{dz} + \frac{\Phi''}{2\Phi'} R = \frac{k}{2} \Phi',$$

équation linéaire qui, abstraction faite du second membre, a pour intégrale

$$(11) \qquad R^2 \Phi' = \text{const.}$$

et qui, en faisant varier la constante, donne finalement

$$(12) \qquad R^2 \Phi' = \frac{k^2}{4} \left(\int \Phi'^{\frac{3}{2}} dz \right)^2.$$

5. L'intérêt des résultats obtenus jusqu'ici ne consiste pas précisément dans le fait que la surface (10) a ses asymptotiques déterminées par (12), c'est-à-dire

par une seule quadrature, car il en est ainsi pour toutes les surfaces réglées à plan directeur ([1]). Il consiste dans une généralisation du théorème du n° 3 relatif à l'aire balayée par le rayon vecteur Om, généralisation à laquelle on est conduit en comparant les équations (9) et (11).

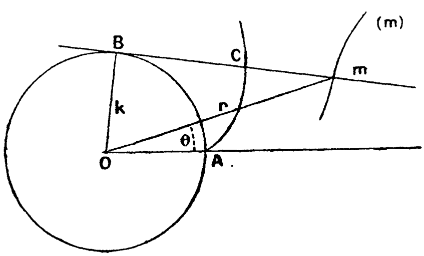
Comme on a

$$\Phi' \, dz = d\theta + d\left(\operatorname{arc}\cos\frac{k}{r}\right),$$

on voit facilement que $(r^2 - k^2)\,\Phi' \, dz$, c'est-à-dire le produit par dz du premier membre de (12), peut s'écrire

$$r^2 \, d\theta + k \, d\left(\sqrt{r^2 - k^2} - k \operatorname{arc}\cos\frac{k}{r} - k\theta\right).$$

Or, considérons dans le plan Oxy le cercle de centre



O et de rayon k; du point m situé sur la projection (m) de l'asymptotique passant par M, menons la tangente mB et traçons la développante AC. L'expression

---

([1]) Il faut cependant observer qu'en général on part de la surface $z = y\varphi(x) + \psi(x)$ dont on détermine par une quadrature très simple la projection des asymptotiques sur Oxy. Mais ce plan n'est pas le plan directeur, et, par suite, le résultat auquel je fais allusion serait ici d'une utilité contestable.

précédente peut s'écrire

$$r^2\,d\theta + k\,d(\overline{\mathrm{B}m} - \mathrm{arc\,AB}),$$

et, comme l'arc AB est précisément égal à BC, on a

$$r^2\,d\theta + k\,d\overline{\mathrm{C}m} = \Psi(z)\,dz,$$

$\Psi(z)$ désignant le second membre de (12).

Supposons que le point m prenne sur (m) deux positions m_1 et m_2; soient C_1 et C_2 les points C correspondants, S_1 et S_2 les aires balayées par Om quand ce rayon vecteur, partant d'une position fixe, devient Om_1 ou Om_2; soient enfin z_1 et z_2 les ordonnées des points de la surface qui se projettent en m_1 et m_2. En intégrant la relation précédente, on aura

$$(13)\qquad 2(S_2 - S_1) + k(\overline{C_2 m_2} - \overline{C_1 m_1}) = \int_{z_1}^{z_2} \Psi(z)\,dz.$$

Si $k = 0$, $\Psi(z)$ doit être remplacé par une simple constante et l'on retrouve le théorème énoncé par M. Appell dans sa Thèse, et qui a été rappelé ici au début du n° 3.

6. *Application à une surface* (10) *du type hélicoïdal.* — Soit dans l'équation (10) $h\Phi(z) = 2z$, h étant une constante. On a ainsi la surface réglée engendrée par une droite perpendiculaire à Oz, située à la distance k de cet axe et animée autour de lui d'un mouvement hélicoïdal régulier. La constante h définit si l'on veut le pas du mouvement hélicoïdal. L'équation (12) devient

$$h^2(r^2 - k^2) = k^2(z - C)^2.$$

Ces hyperboloïdes de révolution, qui coupent l'hélicoïde considéré suivant ses asymptotiques, sont tous identiques à l'hyperboloïde

$$\frac{r^2}{k^2} - \frac{z^2}{h^2} = 1,$$

dont ils se déduisent par une simple translation dans la direction Oz.

De plus, on a dans ce cas

$$\Psi(z) = \frac{2k^2}{h^3}(z - C)^2$$

et le second membre de (13) devient

$$\frac{2k^2}{3h^3}[(z_2 - C)^3 - (z_1 - C)^3].$$

Comme z est de nature logarithmique, par rapport aux coordonnées x, y, on voit qu'il en est de même de l'aire $S_2 - S_1$ balayée par Om.

Je ne puis qu'indiquer ici qu'on trouverait facilement un grand nombre d'exemples analogues.

On pourrait construire des surfaces (10) dont les asymptotiques se projetteraient suivant des courbes dont le rayon vecteur Om balayerait des aires à expression algébrico-logarithmique. Ce serait la généralisation des asymptotiques *unicursales* des conoïdes droits pour lesquelles Om balaye des aires à expression rationnelle (P. Appell et E. Picard, *loc. cit.* — P. Appell et E. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. 351).

7. *Asymptotiques d'une certaine surface de Monge.* — Étudions maintenant la surface (1) lorsque la fonction F est définie non plus par l'équation (7), comme dans ce qui précède, mais par l'équation (8). De (8) on conclut d'abord

$$F'^2 = a^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

k désignant une constante d'intégration. On voit que, F contenant a en facteur, on peut supposer dans (1) que cet a rentre dans $\Phi(z)$. On ne diminuera donc pas la généralité en donnant à a une valeur fixe qui sera ici k. On aura alors

$$F'^2 = 1 - \frac{k^2}{r^2}, \qquad F = \pm\left(\sqrt{r^2 - k^2} - k \operatorname{arc} \cos \frac{k}{r}\right)$$

et la surface (1) sera

$$\Phi(z) = k\theta \pm \left(\sqrt{r^2 - k^2} - k \operatorname{arc} \cos \frac{k}{r}\right). \tag{14}$$

Elle est engendrée par la développante d'un cercle de rayon k dont le plan, normal à Oz, tourne autour de cet axe suivant une loi quelconque dépendant de l'ordonnée z.

Le double signe n'a pas d'utilité réelle ; il correspond aux deux branches de la même développante situées de part et d'autre du point de rebroussement.

Il revient au même pour engendrer une telle surface de construire le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon k, de tracer une courbe quelconque dans l'un de ses plans tangents et de faire rouler ce plan sur le cylindre.

Il s'agit donc d'une surface de Monge et, plus exactement, d'une surface moulure.

Or, il serait bien intéressant d'avoir un résultat concernant les asymptotiques d'une de ces surfaces sur lesquelles les lignes de courbure sont en évidence et ont des propriétés si élégantes.

Prenons l'équation (6) ; substituons-y l'expression attribuée ici à F′ et remplaçons toujours a par k. Pour équation différentielle des asymptotiques de (14), nous aurons

$$\frac{r^2\, dr^2}{k^2\sqrt{r^2 - k^2}} - \frac{2r}{k^2}\, dr\, d\Phi + \left[\frac{\sqrt{r^2 - k^2}}{k^2} - f(\Phi)\right] d\Phi^2 = 0.$$

Si l'on pose encore $R^2 = r^2 - k^2$, il vient

$$\frac{dR}{d\Phi} = 1 \pm k\sqrt{\frac{f(\Phi)}{R}}, \tag{15}$$

le double signe correspondant aux deux systèmes d'asymptotiques.

C'est là une équation élégamment réduite, mais qui paraît cependant n'appartenir à aucun type intégrable de manière élémentaire, du moins tant qu'on laisse toute sa généralité à $f(\Phi)$.

Malgré son caractère négatif, cette conclusion semble utile à mentionner.

Elle montre les difficultés très grandes que doit présenter une étude générale de l'équation (6), puisque, même réduite à (15) au moyen d'une hypothèse très particulière sur $F(r)$, on rencontre encore des difficultés transcendantes.

Pour $f(\Phi) = \Phi$, l'équation (15) est homogène et facile à intégrer explicitement. Mais alors c'est la relation (5) qui doit déterminer $\Phi(z)$ qui offre une quadrature impossible à exprimer explicitement.

Si l'on convient de passer sur cette dernière difficulté, on peut tout de même dire qu'on connaît une famille de surfaces de Monge, dépendant de deux paramètres arbitraires, sur lesquelles les asymptotiques sont déterminables de manière élémentaire.

D'ailleurs, on augmenterait encore un peu la généralité en prenant

$$f(\Phi) = \alpha\Phi + \beta,$$

α et β étant deux constantes; l'équation (15) se ramène alors sans peine au type homogène.

8. *Retour sur les surfaces de révolution.* — Si l'on fait $a = 0$ dans l'équation (1), on a la surface de révo-

lution

$$\Phi(z) = F(r). \tag{16}$$

L'équation (2) donne alors pour définir les asymptotiques

$$\left(F'' - F'^2 \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr^2 + rF' \, d\theta^2 = 0.$$

Si l'on remplace $\Phi(z)$ par z, ce qui ne diminue pas la généralité, on a, plus simplement,

$$F'' \, dr^2 + rF' \, d\theta^2 = 0; \tag{17}$$

c'est l'équation bien connue qui définit les asymptotiques de la surface $z = F(r)$ en les projetant sur le plan $z = 0$.

Si, au contraire, on remplace $F(r)$ par r, on a

$$\Phi'' \, dr^2 - r\Phi'^2 \, d\theta^2 = 0.$$

Comme on a alors

$$r = \Phi(z), \qquad dr = \Phi'(z) \, dz,$$

il vient finalement

$$\Phi'' \, dz^2 - \Phi \, d\theta^2 = 0. \tag{18}$$

Cette équation définit les asymptotiques de la surface $r = \Phi(z)$ en la coupant par des conoïdes droits ayant Oz pour directrice. Elle est moins connue que l'équation (17) et permet cependant, comme on va le voir, d'obtenir très rapidement des résultats extrêmement intéressants.

Remarquons d'abord qu'au point de vue de la détermination des asymptotiques, il y a ici une certaine réciprocité entre les conoïdes droits et les surfaces de révolution.

Comme on l'a vu au n° 3, l'équation (9) détermine les asymptotiques d'un conoïde en le coupant par une famille de surfaces de révolution. De même (18) détermine les asymptotiques d'une surface de révolution en la coupant par une famille de conoïdes.

Nous aurons une première application très élégante de (18) en déterminant $\Phi(z)$ par l'équation linéaire

$$k^2\Phi'' - \Phi = 0,$$

où k est une constante. On obtiendra ainsi les surfaces

$$r = \Phi(z) = A\, e^{\frac{z}{k}} + B\, e^{-\frac{z}{k}}, \tag{19}$$

où A et B sont deux constantes arbitraires, pour lesquelles l'équation (18) se réduira à

$$dz = \pm k\, d\theta,$$

d'où

$$z = \pm k\theta. \tag{20}$$

Ce sont là des hélicoïdes réglés qui ne font que tourner autour de Oz si l'on ajoute une constante d'intégration. Si l'on élimine z entre (19) et (20), on obtient les courbes

$$r = A\, e^{\pm\theta} + B\, e^{\mp\theta}, \tag{21}$$

qui, par rotation autour du pôle, donnent toutes les projections, sur le plan $z = 0$, des asymptotiques des surfaces (19).

Parmi les surfaces (19) il convient de signaler l'alysséïde ou caténoïde dont le méridien est une chaînette ayant Oz pour base. On a alors

$$2A = 2B = k.$$

Les courbes (21) sont alors des transformées par inversion de certaines herpolhodies particulières. Dittrich les appelait *Summenspiralen* (*voir* plus loin).

Un cas plus intéressant encore correspond à $2A = -2B = k$. On a alors la surface

$$r = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{z}{k}} - e^{-\frac{z}{k}}\right), \tag{22}$$

dont les asymptotiques sont, bien entendu, sur les hélicoïdes (20) et se projettent de plus suivant les courbes

$$r = \frac{k}{2}(e^{\pm\theta} - e^{\mp\theta}). \tag{23}$$

Mais on reconnaît là sans peine la projection d'un système de *lignes de courbure* de chacun des hélicoïdes (20). Donc, *si la surface fixe* (22) *est coupée par les hélicoïdes* (20), *invariables en eux-mêmes, mais animés d'un mouvement de rotation autour de* Oz, *les intersections sont lignes asymptotiques sur la surface de révolution et lignes de courbure sur les hélicoïdes.* Et sur l'hélicoïde il suffit évidemment de connaître une ligne de courbure d'un système et de la faire glisser sur la surface pour obtenir toutes celles du même système.

La courbe (23) est connue et présente un intérêt propre. C'est la *Differenzenspirale* de Dittrich (*Die logarithmische Spirale,* Breslau, 1872), ainsi nommée parce que le rayon vecteur est la différence de ceux de deux spirales logarithmiques inverses. M. Aubry l'a considérée aussi dans un travail qui traite *de l'usage des figures dans l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (*Journal de Mathématiques spéciales* de G. de Longchamps, 1896) et l'appelle *spirale tractrice* (E. Wölffing, *Intermédiaire des Mathématiciens,* t. V, 1898, p. 130. —

H. Brocard, *Courbes géométriques. Compléments*, p. 169. — G. Loria, *Ebene Kurven*, p. 455).

Pour $B = 0$ l'équation (19) représente la surface harmonique de révolution dont le méridien est une logarithmique. Les asymptotiques des deux systèmes se projettent suivant deux familles de spirales logarithmiques homothétiques ([1]).

9. On sait, ce que j'ai d'ailleurs rappelé dans mon premier article (n° 4), que la détermination des surfaces de révolution, dont on définit à l'avance la projection des asymptotiques, est un problème élémentaire résoluble par deux quadratures. On peut ici se proposer le problème correspondant qui consiste à *déterminer une surface de révolution de telle manière que ses asymptotiques soient sur les deux familles de conoïdes*

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \psi(z). \tag{24}$$

D'après (18) on obtient une famille $r = \Phi(z)$ à deux paramètres arbitraires, la fonction Φ étant définie par l'équation

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \psi(z)\Phi = 0. \tag{25}$$

Ce n'est plus là un problème élémentaire. L'équation (25) ne peut s'intégrer, en général, que par approximations successives (E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. VI).

([1]) Dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI, 1903, j'ai montré incidemment que la détermination de toutes les surfaces dont *un système* d'asymptotiques se projette suivant une famille de spirales logarithmiques homothétiques se ramène à l'intégration de l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre $r = q$.

Elle joue un rôle capital en Physique mathématique, notamment dans le problème du refroidissement d'une barre hétérogène, et en Mécanique céleste où elle est à la base de l'étude des mouvements du nœud et du périgée dans les théories lunaires de Hill et Brown. Je signale ces points parce qu'il me semble intéressant de comparer à ces questions difficiles un problème d'apparence élémentaire conduisant cependant à une difficulté analytique de même nature.

Toutefois, en prenant les choses d'une manière moins élevée, on pourrait avoir un grand nombre de familles de surfaces de révolution dont les asymptotiques se trouveraient sur des conoïdes connus. Prenons une fonction $\Phi(z)$; d'après (25), déterminons $\psi(z)$ comme étant le quotient de Φ'' par Φ, ce qui déterminera les conoïdes (24). Quant à l'équation (25) nous en déterminerons l'intégrale générale en nous appuyant sur la connaissance de la solution particulière Φ, ce qui n'exigera qu'une quadrature.

Cherchons pour (25) une intégrale de la forme uv; il vient

$$uv'' + 2v'u' + [u'' - \psi(z)u]v = 0.$$

Si u est une solution particulière, on a seulement

$$uv'' + 2v'u' = 0,$$

d'où

$$v = A + B\int \frac{dz}{u^2},$$

et l'intégrale générale est

$$Au + Bu\int \frac{dz}{u^2}.$$

En résumé, *les surfaces de révolution*

$$r = A\,\Phi(z) + B\,\Phi(z)\int \frac{dz}{[\Phi(z)]^2}$$

ont leurs asymptotiques sur les conoïdes

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)}$$

tout comme la surface $r = \Phi(z)$.

Si $\Phi(z)$ est une exponentielle, on retrouve les résultats du n° 8.

Je reviendrai sur ce théorème dans une troisième Note qui contiendra de nouveaux résultats obtenus depuis que la seconde a été envoyée à l'impression.