

A. MYLLER

**Sur le mouvement d'une chaîne pesante
sur une courbe fixe**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 317-326

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9_317_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[R8c]

**SUR LE MOUVEMENT D'UNE CHAÎNE PESANTE
SUR UNE COURBE FIXE;**

PAR M. A. MYLLER.

1. On trouve, dans le *Traité de Mécanique* de

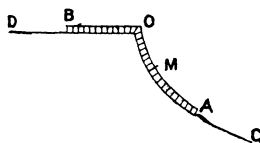
(¹) *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre (Journal de l'École Polytechnique, Cahier LXIV^e, 1894).*

M. P. Appell, l'étude du mouvement d'une chaîne pesante non homogène glissant sans frottement sur une courbe fixe.

L'équation de la courbe et la loi d'après laquelle la densité de la chaîne varie étant données, on détermine le mouvement à l'aide d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étudier la question inverse : déterminer la loi de variation de la densité par la condition que la chaîne prenne un mouvement donné d'avance. La solution dépend de la résolution d'une équation intégrale qui est du type de M. Volterra ou de celui de M. Fredholm, selon les conditions données du problème.

2. Supposons une chaîne pesante de longueur α étendue sur une droite OD (*fig. 1*). Une extrémité A

Fig. 1.



de la chaîne quittant la droite, tombe en glissant le long d'une courbe donnée OC située dans le plan vertical passant par OD. Prenons un axe OZ vertical dirigé vers le bas; appelons s l'arc de la courbe OC compté depuis le point fixe O jusqu'au point de la courbe d'ordonnée z . On peut toujours écrire l'équation de la courbe sous la forme

$$z = \varphi(s).$$

Soit en particulier σ l'arc OA du point O jusqu'à l'extrémité A de la chaîne; la position de la chaîne est

connue dès qu'on connaît σ . Soit encore λ l'arc AM compté depuis l'extrémité A jusqu'au point M situé sur la chaîne. La coordonnée z du point M est alors

$$z = \varphi(\sigma - \lambda).$$

Désignons par $f(\lambda)$ la densité supposée connue d'un élément de la chaîne situé en M, ayant la longueur $d\lambda$ et étant à une distance λ du point A.

L'équation du mouvement s'obtient à l'aide du théorème des forces vives. Calculons le travail : la chaîne glissant d'une longueur $d\sigma$, le travail élémentaire du poids de l'élément $d\lambda$, de masse $f(\lambda) d\lambda$, est

$$g f(\lambda) d\lambda dz = g \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda d\sigma \quad \left[\varphi'(s) = \frac{d\varphi}{ds} \right].$$

En observant que le travail du poids des éléments situés sur la droite OD est nul, on obtient comme expression de la somme de tous les travaux élémentaires

$$g d\sigma \int_0^\sigma \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

D'autre part, la force vive du système est

$$\sum m v^2 = \sum m \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \int_0^\sigma f(\lambda) d\lambda = M \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2,$$

en désignant par M la masse totale de la chaîne. Cela établi, l'équation des forces vives donne

$$(1) \quad M \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = g \int_0^\sigma \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

C'est l'équation du mouvement dans le cas où la densité $f(\lambda)$ est connue (1).

(1) PAUL APPELL, *loc. cit.*

3. Laissons la fonction $f(\lambda)$ indéterminée et donnons-nous le mouvement. On pourrait le caractériser en se donnant σ comme fonction du temps ou encore en se donnant l'accélération $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ comme fonction connue de σ . Supposons donc qu'on ait

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = F(\sigma),$$

$F(\sigma)$ étant une fonction connue. L'équation (1) devient

$$(2) \quad \frac{M}{g} F(\sigma) = \int_0^\sigma \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

C'est une équation intégrale de première espèce du type de M. Volterra, $f(x)$ étant la fonction inconnue. Cette équation admettant toujours une solution, il est possible, par conséquent, de trouver une distribution de la densité $f(\lambda)$ telle que la chaîne prenne le mouvement donné.

Occupons-nous de quelques cas particuliers pour lesquels la solution $f(\lambda)$ de (2) se trouve facilement.

a. Supposons que la courbe OC soit la cycloïde

$$z = \frac{s^2}{8R}.$$

L'équation (2) devient

$$\frac{4RM}{g} F(\sigma) = \int_0^\sigma (\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

En dérivant deux fois on obtient la solution

$$f(\sigma) = \frac{4RM}{g} \frac{d^2 F(\sigma)}{d\sigma^2}.$$

b. La courbe AC est la parabole semi-cubique

$$z = kx^{\frac{2}{3}},$$

(321)

dont l'équation s'écrit encore

$$z = ks^{\frac{2}{3}} - \frac{4k^3}{9}.$$

L'équation (2) devient

$$\frac{3M}{2gk} F(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{f(\lambda)}{\sqrt[3]{\sigma-\lambda}} d\lambda.$$

C'est une équation d'Abel (1) dont la solution est donnée par la formule

$$f(\sigma) = \frac{3\sqrt{3}}{M} \frac{M}{gk\pi} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{F(\lambda)}{\sqrt[3]{(\sigma-\lambda)^2}} d\lambda.$$

c. La courbe AC est l'astroïde

$$x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

dont l'équation s'écrit encore

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}a} s^{\frac{3}{2}}.$$

L'équation (2) devient

$$\frac{\sqrt{3}aM}{\sqrt{2}g} F(\sigma) = \int_0^\sigma \sqrt{\sigma-\lambda} f(\lambda) d\lambda.$$

En dérivant on obtient

$$\frac{\sqrt{6}aM}{g} F'(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{f(\lambda)}{\sqrt{\sigma-\lambda}} dz.$$

C'est une équation d'Abel dont la solution est

$$f(\sigma) = \frac{\sqrt{6}aM}{\pi g} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{F'(\lambda)}{\sqrt{\sigma-\lambda}} d\lambda.$$

(1) *Journal für Mathematik*, t. I.

d. La courbe AC est la tractrice

$$x = \frac{a}{2} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - z^2}}{a - \sqrt{a^2 - z^2}} - \sqrt{a^2 - z^2},$$

dont l'équation s'écrit encore

$$z = ae^{\frac{s}{a}}.$$

L'équation (2) prend la forme

$$\frac{M}{g} F(\sigma) = \int_0^\sigma e^{\frac{\sigma-\lambda}{a}} f(\lambda) d\lambda,$$

qu'on écrit encore

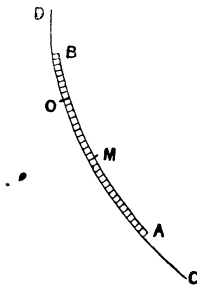
$$\frac{M}{g} F(\sigma) e^{-\frac{\sigma}{a}} = \int_0^\sigma e^{-\frac{\lambda}{a}} f(\lambda) d\lambda.$$

En dérivant on obtient la solution

$$f(\sigma) = \frac{M}{g} \left[F'(\sigma) - \frac{1}{a} F(\sigma) \right].$$

4. Tout autrement se présente le cas où la chaîne

Fig. 2.



est contrainte de glisser tout entière sur une courbe fixe CD. En désignant par σ l'arc AO, compté à partir

du point fixe O sur la courbe $z = \varphi(s)$, par λ l'arc AM compté depuis l'extrémité A jusqu'à un point M de la chaîne, par $f(\lambda)$ la densité de la chaîne en M et par a la longueur de la chaîne, on trouve pour la somme des travaux élémentaires l'expression

$$g \, d\sigma \int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) \, d\lambda.$$

Cette intégrale est étendue ici à tous les éléments de la chaîne, car il n'existe plus, comme dans le cas précédent, d'éléments dont le poids produit le travail nul. L'équation du mouvement est

$$M \frac{d^2\sigma}{dt^2} = g \int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) \, d\lambda.$$

Notre problème relatif à la détermination de la densité, à condition que la chaîne prenne un mouvement donné, est possible, par conséquent, seulement dans le cas où l'équation intégrale de première espèce du type de M. Fredholm

$$(3) \quad \frac{M}{g} F(\sigma) = \int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) \, d\lambda$$

admet une solution. Or on sait que cela n'a pas lieu en général; l'existence de la solution dépend de la forme des fonctions $\varphi(s)$ et $F(s)$. On ne peut avoir des renseignements plus précis que dans des cas spéciaux.

Prenons comme exemple le mouvement sur la cycloïde

$$z = \frac{s^2}{8R}.$$

L'équation (3) devient

$$(4) \quad \frac{4RM}{g} F(\sigma) = \int_0^a (\sigma - \lambda) f(\lambda) \, d\lambda.$$

Le second membre de cette égalité étant, pour $f(\lambda)$ quelconque, une fonction linéaire de σ , il en est de même de $F(\sigma)$. Le problème posé n'est donc possible qu'à la condition

$$F(\sigma) = A\sigma + B.$$

Si cette condition est remplie, le problème admet une infinité de solutions. On le voit immédiatement en posant dans (4)

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \quad (n > 1),$$

et en cherchant à déterminer les coefficients par la condition que l'égalité (4) soit satisfaite. On obtient alors deux relations qui déterminent deux des coefficients en laissant les autres $n - 1$ arbitraires.

5. Revenons aux conditions du problème du n° 2 et proposons-nous de trouver une distribution de la densité telle que l'accélération du mouvement de la chaîne $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ soit proportionnelle à la densité de l'élément de la chaîne qui passe dans ce moment par le point O. On a alors

$$k \frac{d^2\sigma}{dt^2} = f(\sigma),$$

et l'équation (2) devient

$$f(\sigma) = k \frac{g}{M} \int_0^\sigma \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

C'est une équation intégrale homogène, du type de M. Volterra, qui n'admet pas, comme on le sait, de solution différente de zéro. Le problème posé est donc impossible.

6. Si l'on se pose le même problème dans les condi-

tions du n° 3 on obtient, pour déterminer $f(\sigma)$, l'équation homogène

$$(5) \quad f(\sigma) = k \frac{g}{M} \int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

Celle-ci étant du type de M. Fredholm, on sait qu'elle admet une solution réelle, différente de zéro, seulement dans le cas où le coefficient de proportionnalité k prend une des valeurs spéciales k_1, k_2, k_3, \dots qu'on peut déterminer et dont le nombre peut varier du zéro à l'infini. Parmi les solutions correspondant aux diverses valeurs spéciales de λ , il faut choisir les positives; elles sont les seules qui peuvent représenter la densité. Le problème posé est donc possible s'il remplit ces conditions.

Prenons comme exemple le mouvement sur la tractrice

$$z = ae^{\frac{\sigma}{a}}.$$

L'équation du problème est

$$f(\sigma) = k \frac{g}{M} \int_0^a e^{\frac{\sigma - \lambda}{a}} f(\lambda) d\lambda,$$

qui admet, comme on le constate immédiatement, pour la valeur spéciale $k = \frac{M}{ga}$, la solution

$$f(\sigma) = e^{\frac{\sigma}{a}}.$$

7. Avec les mêmes conditions qu'aux n°s 5 et 6, on peut se proposer encore de trouver une distribution de la densité telle que la différence entre l'accélération du mouvement et la densité $f(\sigma)$ de l'élément de la chaîne, qui passe en ce moment par le point O, varie d'après une loi donnée $F(\sigma)$. On est alors conduit respectivement aux équations intégrales de seconde

espèce non homogènes

$$(6) \quad \begin{cases} F(\sigma) + f(\sigma) - \frac{M}{g} \int_0^\sigma \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda = 0, \\ F(\sigma) + f(\sigma) - \frac{M}{g} \int_0^a \varphi'(\sigma - \lambda) f(\lambda) d\lambda = 0. \end{cases}$$

On sait que ces équations admettent en général une solution. Il n'y a d'exception que pour la seconde des équations (6), qui, dans le cas où $k = 1$ serait une valeur spéciale de l'équation homogène (5), n'a pas de solution.