NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

# Sur les surfaces de Monge et sur la composition de calcul différentiel et intégral du concours d'agrégation (1908)

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 9 (1909), p. 294-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__294_0>

[O5iα]

# SUR LES SURFACES DE MONGE ET SUR LA COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DU CONCOURS D'AGRÉGATION (1908);

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les *Nouvelles Annales* viennent de publier une solution de la Composition de Calcul différentiel et intégral d'Agrégation du dernier Concours. L'étude approfondie de ce problème et le désir de le mettre sous une forme canonique m'ont conduit aux résultats qui suivent. La division en parties n'a aucun rapport avec celle du problème. Les lecteurs, que l'Agrégation n'intéresse pas, n'ont qu'à ne pas lire la première et la cinquième partie.

## PREMIÈRE PARTIE.

I. La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $f=0$ ait un contact du second ordre avec son enveloppe est que les courbes $f=0$, $\frac{df}{d\alpha}=0$ aient même tangente au point $(\xi, \eta)$. Puisque la tangente joue un rôle dans la question, considérons tangentiellement la courbe (C) : définissons-la comme enveloppe de la droite d'équation

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \varpi = 0,$$

dans laquelle $\varpi$ est une fonction de l'argument $\varphi$ et du paramètre $\alpha$.

Exprimons que les deux droites parallèles, qui correspondent aux valeurs $\alpha$ et $\alpha + d\alpha$ du paramètre, coïncident aux infiniment petits près du troisième ordre

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

De ces relations résulte immédiatement la relation

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha\, \partial \varphi} = 0,$$

qui peut être substituée à la relation

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

*Les relations*

$$(1) \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha\, \partial \varphi} = 0$$

*expriment rigoureusement que la courbe* (C) *a un contact du second ordre avec son enveloppe.*

Considérons, en effet, l'enveloppe de (C) comme enveloppe de la droite

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - \Omega = 0.$$

$\Omega$ est la fonction de $\varphi$ qui s'obtient en remplaçant, dans $\varpi$, le paramètre $\alpha$ par sa valeur en fonction de $\varphi$ tirée de $\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0$. Des expressions des coordonnées du centre de courbure dans le système considéré, il résulte qu'il faut que $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \varphi^2}$ et $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2}$ soient identiques, en tenant compte de $\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0$. Or, nous avons

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \varphi^2} + 2\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha\, \partial \varphi}\frac{d\alpha}{d\varphi} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha}\frac{d^2 \alpha}{d\varphi^2};$$

et, en tenant compte de $\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0$,

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha\, \partial \varphi}\frac{d\alpha}{d\varphi}.$$

Cette dernière équation montre que les équations

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha\, \partial \varphi} = 0$$

expriment rigoureusement le contact du second ordre.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier l'équivalence de ces équations et de celles de la méthode ponctuelle

$$f = 0, \qquad \frac{df}{d\alpha} = 0, \qquad \mathrm{J}\left(f, \frac{df}{da}\right) = 0.$$

D'après leurs significations géométriques, en effet, $\varpi$ et $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ ont pour expressions

$$\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}\quad \varpi = x f_x' + y f_y',$$
$$\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}\, \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} = x f_y' - y f_x'.$$

Le calcul donne

$$(f_x'^2 + f_y'^2)\quad \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}\, \mathrm{J}\left(f, \frac{df}{d\alpha}\right),$$
$$(f_x'^2 + f_y'^2)\, \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha\, \partial \varphi} = \varpi\quad \mathrm{J}\left(f, \frac{df}{d\alpha}\right).$$

Ces deux équations expriment l'équivalence des résultats.

La condition de contact du second ordre entre la courbe (C) et son enveloppe est donc la compatibilité entre les équations

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \alpha\, \partial \varphi} = 0,$$

c'est-à-dire la *condition d'existence d'une racine double pour l'équation en* $\varphi$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = 0.$$

Par exemple, pour les épicycloïdes d'équation

$$\varpi = \mathrm{A} \cos \omega(\varphi - \varphi_1),$$

dans laquelle A, $\omega$, $\varphi_1$ sont des fonctious de $\alpha$, il faut exprimer l'existence d'une racine double pour une équation du genre de celles que l'on rencontre dans la théorie de la Diffraction.

Il est encore commode de présenter le résultat sur une forme géométrique : *la condition est que la courbe enveloppe de la droite*

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha}$$

*passe par l'origine des coordonnées.*

Il y a une véritable correspondance entre les familles de courbes passant par l'origine et les familles de courbes qui admettent un contact du second ordre avec leur enveloppe.

L'emploi des coordonnées tangentielles offre donc un avantage : la condition est plus simple qu'en coordonnées ponctuelles et s'interprète plus élégamment. La seule objection qu'on puisse faire est que les courbes

$$\frac{df}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d^2 f}{d\alpha^2} = 0$$

disparaissent. Mais est-ce là un inconvénient?

II. Par le choix de l'argument $\varphi$ pour repérer la tangente, une seconde simplification doit se produire, puisque cet *argument est invariant dans la transformation par homothétie.* Soient $\varpi_0$ et $\varpi$ les fonctions relatives aux courbes $(C_0)$ et $(C)$. $\varpi$ est donné par la relation

$$\varpi = k\varpi_0 + a_0 \cos \varphi + b_0 \sin \varphi,$$

$a_0$, $b_0$ désignant les coordonnées du point O'. Exprimer que l'équation en $\varphi$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} = k' \varpi_0 + a'_0 \cos\varphi + b'_0 \sin\varphi = 0$$

a une racine double est identique à chercher l'enveloppe de la droite

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - \varpi_0 = 0,$$

après avoir posé

$$x = -\frac{a'_0}{k'}, \qquad y = -\frac{b'_0}{k'}.$$

D'où la règle : *Pour avoir la relation différentielle cherchée, il faut substituer respectivement* $-\frac{a'_0}{K'}$ *et* $-\frac{b'_0}{K'}$ *aux variables ponctuelles dans l'équation ponctuelle de* $(C_0)$.

C'est là le résultat trouvé par le calcul, dans la méthode ponctuelle ([1]). Pour la suite du n° II et pour le n° III je renvoie à la solution publiée.

IV. Le cas de l'espace est identique à celui du plan. *La condition de contact du second ordre d'une surface* $(\Sigma)$ *avec son enveloppe est que la surface enveloppe du plan*

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha}$$

*passe par l'origine*. La surface $(\Sigma)$ est considérée comme enveloppe du plan

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi(\varphi, \psi).$$

---

([1]) Le cas singulier où $(C_0)$ admet un point d'inflexion ne *doit* pas intervenir en coordonnées tangentielles.

Pour le cas des surfaces $(\Sigma)$ homothétiques à une surface $(\Sigma_0)$,

$$\varpi = k\varpi_0 + a_0 \cos\varphi \cos\psi + b_0 \cos\varphi \sin\psi + c_0 \sin\varphi.$$

$-\frac{a'_0}{K'}, -\frac{b'_0}{K'}, -\frac{c'_0}{K'}$ sont identiques aux coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$ du point $M_0$ de $(\Sigma_0)$ homologue du point de contact de $(\Sigma)$ avec son enveloppe. Si donc la représentation tangentielle de $(\Sigma_0)$ est valable, $M_0$ décrit une courbe (ses coordonnées sont fonctions de $\alpha$); ceci est contraire au fait que $M_0$ doit être quelconque sur $(\Sigma_0)$. Examinons donc le cas où $(\Sigma_0)$ est développable; $\varphi$ et $\psi$ ne sont pas indépendants. On retombe alors sur un résultat identique à celui de la méthode ponctuelle.

V. Soient OXY et $oxy$ les axes fixes et les axes mobiles; $a$ et $b$ les coordonnées de l'origine mobile. Des formules de transformation

$$X = a + x\cos\theta + y\sin\theta, \qquad Y = b - x\sin\theta + y\cos\theta$$

on tire

$$\Omega = \varpi(\varphi) + a\cos(\varphi - \theta) + b\sin(\varphi - \theta).$$

L'argument $\Phi$ est ici $\varphi - \theta$ :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} = \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\frac{d\theta}{d\alpha} + \frac{da}{d\alpha}\cos(\varphi - \theta) + \frac{db}{d\alpha}\sin(\varphi - \theta).$$

Introduisons les coordonnées $u$ et $v$ (par rapport aux axes mobiles) du centre instantané,

$$\frac{da}{d\theta} = u\sin\theta - v\cos\theta, \qquad \frac{db}{d\theta} = u\cos\theta + v\sin\theta.$$

Il faut que l'équation

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} = 0$$

ait une racine double; cette équation est, après suppression du facteur $\frac{d\theta}{d\alpha}$,

$$-u\sin\varphi + v\cos\varphi - \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} = 0;$$

elle représente la normale de $(C_0)$ par rapport aux axes mobiles.

*La roulette mobile coïncide donc avec la développée de* $(C_0)$.

C'est le résultat de la méthode ponctuelle et de la Géométrie. Quant à la *courbe base,* aucune condition ne lui est imposée. Cependant, *puisque nous raisonnons en tangentielles,* il y a lieu de se dêmander s'il n'y a pas de singularité dans le cas où cette base est une droite. *Dans le cas où la développée de* $(C_0)$ *roule sur une droite, les courbes* (C) *passent par un point fixe et touchent en ce point une droite fixe.* Il n'y a donc pas contact du second ordre avec l'enveloppe dans ce cas singulier, qui n'est pas signalé dans l'énoncé (1).

## DEUXIÈME PARTIE.

Nous venons de rencontrer un déplacement de figure plane que l'on n'envisage point en Cinématique, mais qu'il y a lieu de considérer : lorsqu'en effet une courbe (C) située dans un plan XOY reste en contact avec la droite fixe OX en un point fixe O, la construction ordinaire du centre instantané de rotation ne peut être appliquée. Le résultat trouvé plus haut nous apprend que le *centre instantané est le centre de courbure de* (C).

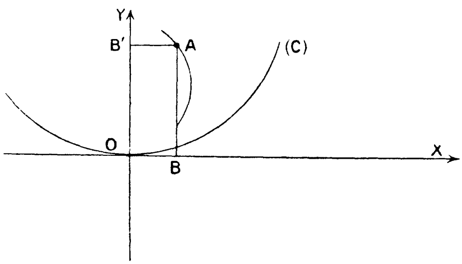
Pour démontrer directement cette propriété, il convient de se poser un problème intéressant et dont des

(1) « L'autre courbe pouvant être quelconque ».

cas particuliers et isolés ont fait l'objet de diverses questions ([1]).

*Une courbe* (C) *du plan xoy reste en contact avec la droite fixe* OX *au point fixe* O ; *un point* A *invariablement lié à cette courbe engendre une courbe*

Fig. 1.




(Γ). *Étudier la correspondance entre les courbes* (C) *et* (Γ).

Soit

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \varpi = 0$$

l'équation de la tangente en un point quelconque de la courbe (C) rapportée à des axes de son plan issus du point A. Les coordonnées de A par rapport aux axes (OX, OY) sont

$$y = \varpi, \qquad x = \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}.$$

Si (C) est donnée, l'équation de (Γ) s'obtiendra par élimination de $\varphi$ entre ces équations. Si (Γ) est donnée par une équation

$$x = f(y),$$

l'équation de (C) sera

$$\varphi = \int \frac{d\varpi}{f(\varpi)} + \text{const.}$$

---

([1]) *N. A.*, 959, 973 ; *M.*, 457 ; *N. C.* de 1876, p. 377 et 383.

Pour avoir des cas particuliers intéressants, il suffit de prendre pour $\frac{1}{x}$ une dérivée d'une fonction connue de $y$. On peut ainsi traiter simplement les questions rappelées. J'en signalerai une nouvelle qui pourrait avoir des applications : en ce qui concerne, en effet, certains canaux, pour ouvrir les vannes des écluses, on fait passer une tige *curviligne,* présentant une inflexion, à travers une masse O trouée qui est fixée sur la rive ; la tige est articulée en un point A de la vanne : le point A décrivant un arc de circonférence, la forme à donner à la tige est donc celle d'un arc de la courbe (C) correspondant au cas où ($\Gamma$) est une circonférence. Le calcul montre qu'il y a trois cas à considérer selon les positions relatives du cercle ($\Gamma$) et de la droite OY. Un cas intéressant est le cas intermédiaire où ($\Gamma$) touche OY : la courbe (C) est alors ou bien inverse, par rapport au pôle A, d'une développante de circonférence de centre A, ou bien une courbe parallèle à cette inverse de développante. Cette courbe (C) est rectifiable : il en est ainsi, plus généralement, lorsque ($\Gamma$) est unicursale.

La détermination du centre de courbure peut être faite en partant du résultat trouvé pour le problème précédent. Nous connaissons la trajectoire ($\Gamma$) d'un point A de la figure mobile ; le centre instantané est donc à l'intersection de OY avec la normale en A à la courbe ($\Gamma$). Appliquant les résultats trouvés pour les expressions des coordonnées de A, on trouve que la normale à ($\Gamma$) en A rencontre OY au point

$$X = 0, \qquad Y = \varpi + \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}.$$

Vu l'orientation de la courbe (C) par rapport aux axes, le centre instantané est donc le centre de courbure de (C).

Aux points de (Γ) à tangentes parallèles à OX correspondent des inflexions pour (C); aux points d'incidence sur (Γ) des normales issues de O correspondent des points de rebroussement pour (C).

## TROISIEME PARTIE.

Il y a lieu de se demander si un déplacement analogue, dans le cas de l'espace, peut donner des résultats intéressants. Nous indiquons ici une généralisation curieuse.

Etant donnée une surface (S) assujettie à rester en contact avec un plan fixe en un point fixe O, il semble *a priori* que, puisque la surface dépend encore de trois paramètres indépendants, il n'existe aucun point A invariablement lié à (S) qui puisse engendrer une surface (Σ) : il existe un tel point lorsque la surface (S) est une *surface de Monge,* c'est-à-dire une surface trajectoire orthogonale de plans tangents à un cône [1].

Considérons, en effet, la surface (Σ) sur laquelle nous supposons rester un point A invariablement lié a une surface (S) assujettie à toucher en un point fixe O un plan fixe (P); soit $Oz$ la normale à ce plan; lorsque (S), tout en restant en contact avec (P) en O, pivote autour de $Oz$, tout point invariablement lié à cette surface engendre une circonférence d'axe $Oz$ :

---

[1] Monge a considere des surfaces plus generales, ayant pour nappe de la développee une developpable quelconque, nous ne considerons ici que le cas ou cette developpable est un cône de sommet à distance finie, nous ecartons, par consequent, les *surfaces moulures* La denomination de *surfaces de Monge* dans le cas particulier que nous considerons, est celle de M. Goursat (*Equations aux derivees partielles du second ordre,* t. I, p. 130).

la surface ($\Sigma$) est donc de révolution. Dire que A reste sur ($\Sigma$) revient à dire qu'il existe une relation entre les distances de A à la normale et au plan tangent en un point quelconque de S. Or, l'équation ([1]) donnée par Monge *exprime* précisément qu'une propriété caractéristique des surfaces de Monge est la suivante :

*Il existe une relation entre les distances du sommet* A *du cône au plan tangent et à la normale correspondante d'une surface de Monge.*

Le théorème que nous venons d'établir est donc le suivant :

Théorème. — *Pour qu'un point* A *invariablement lié à une surface* (S) *qui varie de toutes les manières possibles en restant tangente en un point fixe à un plan fixe engendre une surface* ($\Sigma$) (nécessairement de révolution), *il faut et il suffit que la surface* (S) *soit une surface de Monge; le point* A *est le sommet du cône-développée de cette surface de Monge.*

Dans le cas particulier où la surface de Monge dégénère en une surface de révolution, il existe une infinité de points A situés sur l'axe. Réciproquement, ce cas est le seul pour lequel *deux* points jouissent de la propriété du point A.

Cette propriété des surfaces de Monge les caractérise parmi les surfaces. Nous allons établir une seconde propriété qui caractérisera les *lignes de courbure*

([1]) En appliquant la transformation de Legendre à l'équation des surfaces de Monge, on obtient celle qui a fait l'objet de la composition d'Analyse d'Agrégation de 1897. Ce problème se résout dès lors en quelques lignes. Cette remarque n'est pas faite dans la solution publiée dans les *Nouvelles Annales* (1902.)

*sphériques* parmi toutes les courbes qui sont tracées sur une surface de Monge.

En général, lorsqu'une surface quelconque (S) est assujettie à rester en contact avec un plan fixe (P) en un point fixe O de ce plan, le point de contact sur (S) devant rester sur une courbe (Γ) de cette surface, si cette courbe (Γ) est quelconque, un point A invariablement lié à la surface engendre une surface de révolution d'axe $Oz$; si cette courbe (Γ) est une courbe de contact de (S) avec une développable circonscrite à (S) et à une sphère de centre A, le point A engendre un plan.

Lorsqu'il s'agit d'une surface de Monge, une telle ligne est identique à une ligne de courbure sphérique de la surface. Donc :

Théorème. — *Lorsqu'une surface de Monge reste en contact avec un plan fixe* (P) *en un point fixe* O *de ce plan, et, lorsque le point de contact décrit sur la surface une ligne de courbure sphérique, le sommet du cône-développée décrit un parallèle de* (Σ).

La conséquence la plus importante de ces deux théorèmes est :

1° Qu'il existe une correspondance entre toute surface de révolution et une famille de surfaces de Monge;

2° Qu'il existe une correspondance entre les parallèles de la surface de révolution et les lignes de courbure sphériques de ces surfaces de Monge.

En particulier, aux cylindres de révolution correspondent les surfaces *classiques* dont les normales touchent des sphères; aux sphères de centre O correspondent des surfaces de Monge dégénérées tangentiellement en des courbes sphériques; aux cônes de révolution autour de $Oz$ correspondent les surfaces de

Monge trajectoires sous un angle constant des droites issues du point A.

L'étude analytique de cette correspondance se fait aisément en considérant les surfaces de Monge en coordonnées de Bonnet. Considérées comme enveloppes du plan

$$X(x+y)+iY(y-x)+(xy-1)Z=z(1-xy),$$

les surfaces de Monge ont pour équation

$$(1+xy)^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=F(z);$$

les lignes de courbure sphérique sont définies par l'équation

$$z=\text{const.}$$

*Remarque.* — Pour réaliser mécaniquement la liaison qui consiste à faire passer une surface géométrique par un point, avec un plan tangent déterminé en ce point, il suffit de considérer une surface matérielle, limitée par deux surfaces parallèles, assujettie à passer entre deux sphères solides dont la plus courte distance est rigoureusement égale à l'épaisseur de la surface matérielle.

Il est encore possible d'utiliser, dans un corps solide, une cavité limitée par deux surfaces parallèles, et la distance maxima, égale à l'épaisseur de cette cavité, de deux sphères solides.

## QUATRIÈME PARTIE.

Nous avons introduit une propriété caractéristique des surfaces de Monge ; elle conduit à d'autres résultats très intéressants relatifs à ces surfaces.

La polaire réciproque, par rapport à toute sphère de centre A, d'une surface de Monge est une surface de

Monge. L'inverse, par rapport à toute sphère de centre A, d'une surface de Monge est une surface de Monge. La polaire, relativement au point A d'une surface de Monge, est une surface de Monge.

Ces propriétés ont pour analogues, dans le cas du plan, celles de la spirale logarithmique. Il y a donc lieu d'examiner si d'autres propriétés de la courbe s'étendent aux surfaces, et d'en déduire que les *surfaces de Monge se présentent comme une généralisation de la spirale logarithmique.*

La spirale logarithmique est sa propre polaire réciproque par rapport à toute hyperbole équilatère qui a son centre au pôle de la spirale et qui lui est tangente ([1]).

Ce théorème se généralise ainsi : *La polaire réciproque, par rapport à la quadrique*

$$\pm X^2 \pm Y^2 \pm Z^2 - 1 = 0$$

*de centre* A, *d'une surface de Monge est une surface de Monge.*

Prenons, en effet, pour axes coordonnés $Axyz$ les axes de symétrie de la quadrique; soient $(x, y, z, p, q)$ et $(X, Y, Z, P, Q)$ deux éléments de contact indépendants ; le calcul donne

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 + P^2 + Q^2}{(PX + QY - Z)^2},$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1 + p^2 + q^2}{(px + qy - z)^2};$$

il en résulte l'invariance de l'équation aux dérivées partielles du second ordre des surfaces de Monge

$$\frac{D\left[x^2 + y^2 + z^2, \dfrac{(px + qy - z)^2}{1 + p^2 + q^2}\right]}{D(x, y)} = 0.$$

([1]) Klein, Lie, *B. D.* de 1872.

Le théorème relatif à la développée de la spirale logarithmique est généralisé en considérant la nappe de la développée (autre que le cône) d'une surface de Monge : *cette nappe est une surface de Monge*. La considération de la congruence des normales d'une surface de Monge, dans ses relations avec la surface de Monge développée de la précédente, conduit à des résultats intéressants.

Soient une surface (Π) *quelconque*, O un point fixe de l'espace, OM le rayon aboutissant à un point quelconque M de (Π), MP la projection du rayon sur le plan tangent en M à (Π); nous donnerons, pour abréger, le nom de *vibration* à la droite MP. Cette dénomination est justifiée par le fait que, lorsque (Π) est la *surface d'onde de Fresnel*, la droite MP, projection du *rayon physique* OM sur le plan de l'onde correspondante, porte la vibration lumineuse ou le déplacement électrique (*dans la théorie de Fresnel*) (1).

Déterminons la surface (Π) par la condition que la *congruence des vibrations soit une congruence de normales*. Prenons une surface (Π) *non développable* et, sur elle, considérons l'$\infty^1$ de géodésiques dont les tangentes constituent la congruence de normales : l'une quelconque de ces géodésiques est telle que sa tangente, sa normale principale et le rayon OM sont dans un même plan; elle est dès lors plane et passe par O : *la surface* (Π) *est une surface de Monge* dont le pôle A coïncide avec O. *La congruence des vibrations est celle des normales à une famille de surfaces parallèles qui sont toutes des surfaces de Monge*.

Un autre cas à considérer est celui où la surface (Π)

---

(1) *Cf.*, par exemple, le *Cours de Physique* de M. H. BOUASSE, t. V, *Électroptique, Ondes hertziennes*, Chap. V.

dégénère tangentiellement en une courbe. *Dans le cas d'une courbe sphérique, la congruence des vibrations est une congruence de normales.*

*L'une des surfaces trajectoires orthogonales est inverse par rapport à O d'une surface développable.* Dans le cas des courbes sphériques, en effet, les rayons sont des normales à la courbe ; ils fournissent une solution du problème des développées pour cette courbe ; si, par conséquent, nous considérons les normales perpendiculaires aux plans tangents passant par O (ce sont des vibrations particulières), ces normales engendrent une surface développable dont l'inverse est trajectoire orthogonale des vibrations.

Interprétons physiquement cette propriété ; supposons la courbe sphérique fermée et n'admettant pas de singularité. Nous pouvons alors la considérer comme le siège d'un courant, et, si nous disposons en O un pôle d'aimant, la force électromagnétique exercée par O sur l'élément M a pour droite d'action la normale à la courbe et au plan tangent en M mené par O. Donc :

*Dans le cas d'une courbe sphérique fermée, sans singularité, parcourue par un courant, si l'on dispose un pôle d'aimant au centre de la sphère, les droites d'action des forces électromagnétiques exercées sur les éléments du circuit sont tangentes à une développée de la courbe.*

La réciproque est exacte et la propriété caractérise les courbes sphériques.

Signalons, pour terminer, une dernière propriété caractéristique des surfaces de Monge, qui résulte aussi de la définition féconde que nous avons introduite.

La transformation par polaires réciproques par rapport à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$$

fait correspondre à un élément de contact issu d'un point M un élément de contact issu d'un point $m$. *Déterminons une surface à laquelle appartienne l'élément de contact m par la condition que la congruence des droites* M$m$ *est une congruence de normales* (1).

Soient $(x, y, z, p, q)$, $(X, Y, Z, P, Q)$ les éléments $m$ et M.

En posant

$$U = \overline{Mm},$$

et en considérant le point de coordonnées

$$\xi = x + \frac{\lambda}{U}(x - X),$$

$$\eta = y + \frac{\lambda}{U}(y - Y),$$

$$\zeta = z + \frac{\lambda}{U}(z - Z),$$

la condition qui exprime que ce point engendre une surface normale à la droite M$m$ est

$$2U\,d\lambda + d(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

$U\,d\lambda$ doit être une différentielle exacte; il en résulte qu'il doit exister une relation entre $\overline{OM}$ et $\overline{om}$. L'équation des surfaces cherchées est donc une équation de Monge et d'Ampère, admettant pour intégrale intermédiaire du premier ordre

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = F(x^2 + y^2 + z^2)$$

---

(1) *Cf.* la Note de M. J. Haag, *Sur les surfaces de Monge*, insérée dans les *Nouvelles Annales* de février 1908.

ou

$$(px+qy-z)^2 = \frac{1+p^2+q^2}{F(x^2+y^2+z^2)};$$

*les surfaces* (M) *et* ($m$) *sont donc des surfaces de Monge.*

## CINQUIÈME PARTIE.

La condition trouvée au 1° du problème d'Agrégation est laissée invariante par le groupe des transformations de contact

$$\Omega = F(\varpi), \qquad \Phi = \varphi;$$

F est une fonction arbitraire dans laquelle $\alpha$ ne figure point. Cette remarque permet de simplifier les calculs par un choix convenable de la fonction F : c'est le cas des épicycloïdes citées plus haut, lorsque A ne dépend pas de $\alpha$.

La remarque analogue doit être faite pour le cas de l'espace : la condition de contact du second ordre des surfaces ($\Sigma$) avec leur enveloppe est laissée invariante par le groupe

$$\Omega = F(\varpi), \qquad \Phi = \varphi, \qquad \Psi = \psi.$$

Ces transformations de contact, dont des cas particuliers sont intimement liés à d'autres transformations classiques, jouent un rôle considérable dans la théorie des surfaces de Monge qu'*elles transforment les unes dans les autres* [1] : c'est ainsi que les transformations

$$\Omega = \sin k\varpi$$

---

[1] L'équation des surfaces de Monge (en coordonnées de Bonnet)

$$q^2 r - p^2 t = 2s\frac{px-qy}{1+xy}$$

est laissée invariante. Plus généralement, les seules équations de transforment les surfaces dont les normales touchent une sphère en des courbes sphériques.