NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur certaines quadratures

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 289-293

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__289_0>

[C2j]

SUR CERTAINES QUADRATURES;

PAR M. G. FONTENÉ.

Dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales* (1908, p. 385), j'ai cherché à donner l'historique de diverses formules de cubature. Des remarques de M. d'Ocagne (1909, p. 50) ont ramené mon attention sur ce sujet.

I.

1. La formule *dite de Sarrus*,

$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B''), \tag{1}$$

applicable aux volumes des segments à bases parallèles pour lesquels l'aire de la section parallèle aux bases est exprimée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant,

$$S = az^2 + bz + c,$$

est, bien entendu, *une simple formule de quadrature;* elle donne la valeur d'une intégrale définie dont l'élément différentiel est

$$(ax^2 + bx + c)\,dx,$$

ou l'aire comprise entre l'axe des x, la parabole du second degré

$$y = ax^2 + bx + c$$

et deux ordonnées déterminées y_0 et y_2 :

$$S = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{1'}$$

2. Dans le *Traité d'Analyse infinitésimale* de MM. Rouché et Lévy, t. II, p. 312, la formule (1) est donnée sous le nom de *règle des trois niveaux* et attribuée à Képler : les auteurs n'indiquent pas l'Ouvrage de Képler où se trouve cette formule.

3. Pour une parabole cubique

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

Newton a donné la formule

$$S = \frac{h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3),$$

l'intervalle h étant partagé en trois parties égales.

Cotes, en reproduisant cette formule d'après Newton (*De Methodo differentiali Newtoniana*), observe qu'une formule analogue existe pour une parabole de degré quelconque

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots,$$

l'intervalle h étant partagé en m parties égales; il donne le Tableau suivant :

$$(\alpha) \qquad m = 1, \qquad S = h\,\frac{y_0 + y_1}{2};$$

$$(\beta) \qquad m = 2, \qquad S = h\,\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6};$$

$$(\gamma) \qquad m = 3, \qquad S = h\,\frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8};$$

$$(\delta) \qquad m = 4, \qquad S = h\,\frac{7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4}{90};$$

... .

4. *Catalan a remarqué que la formule* (β) *s'applique également au cas* $m = 3$ (*Nouvelles Annales*, 1857, p. 312). La formule *dite de Sarrus* est donc

applicable si l'on a

$$S = az^3 + bz^2 + cz + d.$$

Maleyx a étendu la remarque de Catalan : *la formule relative au cas $m = 2n$ est également applicable au cas $m = 2n + 1$* (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 543).

M. d'Ocagne a retrouvé ce résultat.

5. Maleyx ne s'est pas borné au cas où l'intervalle h est partagé en parties égales : il s'est proposé d'employer le nombre minimum d'ordonnées, ou plutôt le nombre minimum de sections, car il considère la question du volume.

Pour $m = 2$ il faut au moins deux sections, et Maleyx donne la formule générale

$$V = h\frac{(X + \lambda Y)}{1 + \lambda},$$

X et Y étant les aires de deux sections faites par des plans parallèles aux bases, de part et d'autre de la section moyenne, à des distances du plan de cette section données par les formules

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{1} = \frac{h}{2\sqrt{3\lambda}};$$

il fait en particulier $\lambda = 1$. Si l'on fait $\lambda = 3$, ce qui donne

$$x = \frac{h}{2}, \qquad y = \frac{h}{6},$$

X est l'une des bases et l'on obtient la formule qui se trouve dans l'Ouvrage de M. Halsted : *Rational Geometry*, et dont M. Ch. Michel était parti pour retrouver la formule ci-dessus avec λ.

Pour $m=3$, Maleyx donne une formule générale qui comprend la formule (γ) avec quatre sections, la formule (β) avec trois sections, enfin une formule avec deux sections seulement; cette formule est

$$V = h\frac{X+Y}{2},$$

X et Y étant les aires de deux sections faites par des plans parallèles aux bases, à la distance $\frac{h}{2\sqrt{3}}$ du plan de section moyenne; c'est la formule ci-dessus pour $\lambda = 1$.

6. La formule (1), en ce qui concerne le volume du *prismatoïde*, est due à Mascheroni. M. Haillecourt est peut-être le premier qui ait observé qu'elle s'applique au volume d'un segment à bases parallèles limité latéralement par une surface réglée quelconque : il démontre que l'aire de la section est exprimée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant. Il donne l'exemple que j'ai cité à tort comme étant peut-être nouveau (p. 386). La Note de M. Haillecourt a paru, en 1868, dans la *Revue des Sociétés savantes;* une autre Note du même auteur sur le sujet qui nous occupe a paru, en 1876, dans le même recueil.

7. Maclaurin (*Traité des fluxions*, n° 848, 1742) a donné une formule d'approximation,

$$\frac{S}{h} = \frac{y_0+y_m}{2(m+1)} + \frac{m(y_1+y_2+\ldots+y_{m-1})}{m^2-1},$$

qui coïncide, pour $m=2$ et pour $m=3$, avec les formules (β) et (γ).

La formule de quadrature de Thomas Simpson s'obtient en appliquant la règle des trois niveaux à chaque groupe de trois ordonnées successives.

II.

8. La formule

$$V = B''h + P\frac{h}{3},$$

relative au volume du prismatoïde, appartient à Mascheroni; elle a été retrouvée par M. Koppe.

M. Haillecourt a considéré le cas où les polygones qui limitent les bases polygonales du prismatoïde sont remplacées par deux courbes, le solide étant limité latéralement par une surface *développable*. La lettre P représente donc l'aire enfermée dans une courbe qu'on doit supposer tracée dans un plan parallèle aux plans des deux premières, et qui possède cette propriété : M' et M'' étant deux points correspondants des courbes données, le point correspondant M de la nouvelle courbe est tel que la tangente en M est parallèle aux tangentes en M' et M'', et que le rayon de courbure en M est égal à la demi-différence des rayons de courbure en M' et M''.

Note. — L'axiome de Cavalieri donne immédiatement ce résultat connu : Lorsqu'une droite glisse sur deux arêtes opposées d'un tétraèdre, en restant dans un plan parallèle à deux autres arêtes opposées, cette droite engendre une surface qui divise le tétraèdre en deux parties équivalentes. Cette remarque est à rapprocher de la formule

$$V = \frac{1}{6} AB \times CD \times \mu.$$