NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN GODEAUX

Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 260-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__260_1>

[$N^2 3b$]

NOUVEAUX TYPES DE CONGRUENCES LINÉAIRES DE CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

L'étude de plusieurs congruences linéaires de cubiques gauches rencontrées par MM. Stuyvaert (1) et

(1) M. STUYVAERT, *Cinq études de Géométrie analytique,* (Prix F. Dernyts). Gand, Van Gœthem, 1908.

Veneroni peut être facilitée par l'emploi d'une transformation birationnelle entre deux espaces; en même temps, on découvre d'autres types de congruences linéaires de cubiques gauches; c'est ce que nous voulons montrer dans cette Note.

1. Soient Σ_1, Σ_2 deux espaces linéaires et ponctuels à trois dimensions superposés ou non, et dans le premier de ces espaces une courbe gauche C_1 d'ordre 6 et de genre 3. On sait que les surfaces cubiques passant par une telle courbe sont en nombre ∞^3 et que trois de ces surfaces cubiques, si elles ne font pas partie d'un même faisceau, se rencontrent encore en un point unique. Deux surfaces cubiques se rencontrent encore suivant une cubique gauche octosécante de la courbe C_1.

Cela étant, entre les ∞^3 surfaces cubiques passant par C_1 et les plans de l'espace Σ_2, établissons une collinéation. Par le fait même, on établit une correspondance birationnelle entre les deux espaces Σ_1, Σ_2. A un point commun à trois plans de Σ_2 on fait correspondre le point commun aux trois surfaces cubiques correspondantes dans Σ_1, et inversement.

Aux points d'une droite de Σ_2 correspondent les points d'une cubique gauche de Σ_1, donc aux points d'un plan de Σ_1 correspondent les points d'une surface cubique de Σ_2. De même, on voit qu'aux points d'une droite de Σ_1 correspondent les points d'une cubique gauche de Σ_2.

Les ∞^3 surfaces cubiques de Σ_2 correspondantes aux plans de Σ_1 passent par une courbe gauche C_2 du sixième ordre et de genre 3; les ∞^4 cubiques gauches correspondantes aux droites de Σ_1 s'appuient huit fois sur C_2.

A un point d'une courbe C correspondent dans l'autre espace les points d'une droite, car la courbe C de cet espace est simple sur la surface cubique transformée d'un plan du premier espace. Ces droites engendrent une surface du huitième ordre, car la transformée d'une droite quelconque d'un espace est une cubique gauche octosécante de la courbe C de l'autre espace.

Soient A un point de C_1, a la droite de Σ_2 qui correspond à A. Aux ∞^2 droites passant par A correspondent ∞^2 cubiques gauches dégénérées en une droite fixe a et une conique mobile; le nombre de ces coniques étant ∞^2, elles ne peuvent s'appuyer qu'au plus en cinq points sur C_2, et par conséquent a est une trisécante de C_2.

Ainsi, aux points d'une courbe C correspondent les trisécantes de l'autre.

La transformation que nous venons de définir a été étudiée par Cayley [1], Cremona [2] et par MM. Loria [3], Nœther [4] et R. Sturm [5].

2. On obtient aisément l'expression analytique de

---

[1] *On the rational transformation beween two spaces* (*Proceeding of the London Mathematical Society*, t. III, 1870, p, 127-180. — *On the transformation of unicursal surfaces* (*Math. Ann.*, t. III, 1871, p. 469-474).

[2] *Mélanges de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (*Journal de Crelle*, t. 68, 1868, p. 72-75). — *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (*Rendiconti del R. Ist. Lomb*, t. IV, 1871, 2e série, p. 269-279 et 315-324). — *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (*Annali di Matematica*, t. V, 1871, 2e série, p. 132-162).

[3] *Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terzo ordine* (*Atti di Torino*, t. XXVI, 1890, p. 275).

[4] *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen insbesondere in ihrer Anwendung auf Abbildung algebraischer Flachen* (*Math. Annalen*, t. III, 1871, p. 552-556).

[5] *Ueber diejenigen Cremonaschen Verwandschaften bei denen den Ebenen des einen Raumes allgemeine Flächen 3. Ordnung andern entsprechen* (*Jahr. der D. Math. Vereinigung*, t. XIV, 1905, p. 18-24).

la transformation. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes courantes de l'espace Σ_1; y_1, y_2, y_3, y_4 celles de l'espace Σ_2.

Soient

$$a_x,\quad a'_x,\quad a''_x;\quad b_x,\quad b'_x,\quad b''_x;\quad c_x,\quad c'_x,\quad c''_x;\quad d_x,\quad d'_x,\quad d''_x$$

des formes quaternaires linéaires en (x). Leur égalité à zéro nous donnera douze plans quelconques de Σ_1.

La sextique C_1 a pour équations [1]

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Une surface cubique circonscrite à la courbe C_1 est représentée pour l'évanouissement du déterminant

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Si

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0$$

est l'équation d'un plan quelconque de Σ_2, la collinéation entre les plans de cet espace et les surfaces (1) peut être représentée par

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4.$$

Dans ces conditions, les équations de la transformation sont

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \begin{vmatrix} b_x & c_x & d_x \\ b'_x & c'_x & d'_x \\ b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_x & d_x & a_x \\ c'_x & d'_x & a'_x \\ c''_x & d''_x & a''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_x & a_x & b_x \\ d'_x & a'_x & b'_x \\ d''_x & a''_x & b''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{vmatrix}.$$

---

(1) STUYVAERT, *loc. cit.*

3. Aux ∞^3 droites d'une congruence G de Σ_2 correspondent dans Σ_1 les cubiques gauches d'une congruence Θ possédant la sextique C_1 comme courbe octosingulière. Ainsi l'étude d'une telle congruence de cubiques gauches se trouve ramenée à celle d'une congruence de droites.

Supposons que la congruence G considérée dans Σ_2 soit d'ordre m et de classe n. La congruence Θ de cubiques gauches correspondantes dans Σ_1 est d'ordre m (¹) et de classe égale au nombre de droites de G s'appuyant deux fois sur une cubique gauche, donc $m + 3n$.

A l'aide de la transformation, on établit aisément les théorèmes suivants :

Les cubiques gauches de Θ qui s'appuient sur une courbe d'ordre μ et sur une courbe d'ordre μ' sont au nombre de $9\mu\mu'(m+n)$.

Les cubiques gauches de Θ qui s'appuient deux fois sur une courbe d'ordre μ et de genre p sont au nombre de

$$\left[\frac{(3\mu-1)(3\mu-2)}{1.2} - p\right]m + \frac{3\mu(3\mu-1)}{1.2}n.$$

Les surfaces engendrées par ∞^1 cubiques de Θ ont toutes les caractères $P_g = 0$ *et* $P_a \leqq 0$.

La sextique C_1 *est singulière* (²) *d'ordre* $3(m+n)$.

4. Examinons spécialement le cas $m = 1$.

Les congruences de droites d'ordre 1 peuvent se partager en trois types :

(¹) L'ordre d'une congruence de courbe est le nombre de courbes passant par un point, et la classe le nombre de courbes ayant une bisécante fixe.

(²) Une courbe est singulière d'ordre p si les courbes de la congruence passant par un point de cette courbe engendrent une surface d'ordre p.

a. Gerbe de rayons (classe zéro).

b. Système des bisécantes de la cubique gauche (classe 3).

c. Ensemble des droites s'appuyant sur une courbe d'ordre n et sur une droite ($n-1$) *fois sécante de la courbe* (classe n).

On obtient trois types de congruences de cubiques gauches, à savoir :

a. Congruence des cubiques gauches passant par un point fixe et s'appuyant huit fois sur une sextique gauche de genre 3 singulière d'ordre 3. Cette congruence est aussi de la première classe.

MM. Stuyvaert ([1]) et Veneroni ([2]) ont rencontré ce type, et M. Stuyvaert ([3]) l'a étudié.

b. Congruence des cubiques gauches possédant une sextique de genre 3 *octosingulière d'ordre* 12 *et une courbe unicursale d'ordre* 9 *bisingulière d'ordre* 6 *et s'appuyant vingt-quatre fois sur la sextique singulière. La congruence est de la dixième classe.*

c. Congruence formée pour les cubiques gauches possédant une sextique de genre 3 *octosingulière d'ordre* $3(1+n)$, *une cubique gauche singulière d'ordre* $3n$ *s'appuyant huit fois sur la sextique et une courbe d'ordre* $3n$ *singulière d'ordre* 3 *s'ap-*

([1]) *Loc. cit.* — *Congruences linéaires de cubiques gauches* (*Comptes rendus*, novembre 1905). — *Congruences de triangles et autres variétés algébriques annulant des matrices* (*Journal de Crelle*, 1907, Band 132, p. 132).

([2]) *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe* (*Rendiconti di Palermo*, t. XVI, 1902).

([3]) *Une congruence linéaire de cubiques gauches* (*Bul. de l'Acad. R. de Belgique*, 1907).

puyant $8n$ *fois sur la sextique et* $(n - 1)$ *fois sur la cubique. La classe est égale à* $3(1 + n)$.

Pour $n = 1$ on retrouve une congruence de M. Stuyvaert [1].

L'étude de ces congruences ne présente plus aucune difficulté [2].