ÉMILE TURRIÈRE

# Sur une transformation de droites

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 9 (1909), p. 249-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__249_0>

[P¹6f]

# SUR UNE TRANSFORMATION DE DROITES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

*Définition analytique.* — Soient $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, $p_5$, $p_6$ les coordonnées plückériennes d'une droite D, les trois premières étant les cosinus directeurs; soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées de la projection sur D de l'origine O des coordonnées rectangulaires. En posant

$$p'_1 = -p_1, \qquad p'_2 = -p_2, \qquad p'_3 = -p_3,$$
$$p'_4 = x_0, \qquad p'_5 = y_0, \qquad p'_6 = z_0,$$

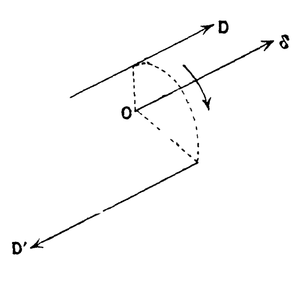
les $p'$ sont les coordonnées d'une droite D'; les coordonnées de la projection sur D' de O sont

$$x'_0 = p_4, \qquad y'_0 = p_5, \qquad z'_0 = p_6.$$

Les formules précédentes définissent donc une *transformation de droites univoque et réciproque.*

*Définition géométrique.* — Soit O un point fixe de

Fig. 1.




l'espace, qui suffit à lui seul pour définir la transformation. Étant donné un vecteur D quelconque de l'espace, menons par O l'axe $\delta$ équipollent à D; autour de $\delta$ faisons tourner D de l'angle $\frac{\pi}{2}$ de gauche à droite pour un observateur couché sur $\delta$, la tête en O, les pieds dirigés vers $\delta$. D, après cette rotation, vient occuper une certaine position; prenons sur elle un vecteur D' de sens opposé à celui de D. D correspond à D', comme D' correspond à D.

Application aux séries réglées. — La transformation fait correspondre une série réglée à une série réglée et les deux séries sont réciproques; à une droite D du plan $Oxy$, correspond une droite parallèle rencontrant $Oz$ : la transformation établit donc une correspondance entre les conoïdes droits de directrice $Oz$ et les courbes du plan $Oxy$; l'équation de la tangente à la courbe étant

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \varpi,$$

les équations de la génératrice correspondante du conoïde sont

$$z = \varpi, \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0;$$

la cote de la génératrice est la distance de O à la tangente; le paramètre de distribution est la distance de O à la normale à la courbe.

C'est ainsi qu'à l'*hélicoïde gauche*

$$z = a\theta, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

*correspond la développante de circonférence*

$$\varpi = a\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right);$$

qu'au *cylindroïde de Cayley-Plücker*

$$z = \frac{2axy}{x^2+y^2},$$

*correspond l'hypocycloïde à quatre rebroussements*

$$\varpi = -a \sin 2\alpha;$$

qu'au *conoïde droit de directrice* O$z$, *circonscrit à la sphère* $(x-a)^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2$, *correspond une ellipse* de foyers

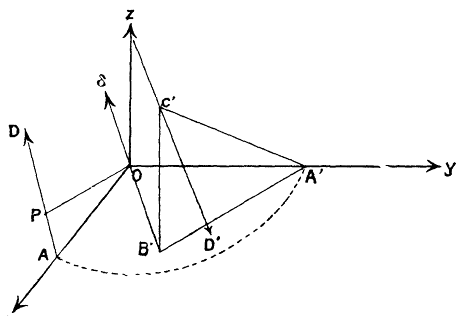
$$x=0, \qquad y=\pm a,$$

de grand axe $2\mathrm{R}$.

Dans le cas particulier du *conoïde de Wallis, l'ellipse dégénère tangentiellement en deux points;* ces deux points proviennent des deux sens distincts qui peuvent être choisis sur les génératrices du conoïde. Voici d'ailleurs une démonstration géométrique élémentaire de ce dernier résultat. Considérons un trièdre trirectangle O$xyz$ et, sur O$x$, un point A.

Supposons le vecteur D issu de A et situé dans O$xy$;

Fig. 2.




le vecteur D′ rencontre O$z$ et est situé comme sur la figure. Lorsque D tourne autour de A, D′ engendre un conoïde droit de directrice O$z$.

Prenons sur O$y$ le point A′, obtenu en faisant tourner A autour de O$z$ dans le sens direct (les axes sont *à droite*); projetons A′ sur $\delta$ en B′, sur D′ en C′;

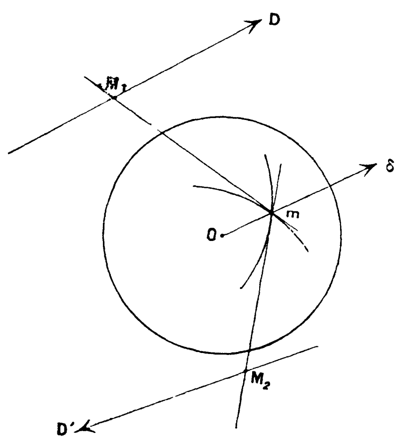
projetons O sur D en P. $B'C'$ parallèle à $Oz$ a pour longueur OP, distance de O à D; $A'B'$ est égal à AP, puisque les triangles rectangles OPA, $OB'A'$ sont égaux. Les deux triangles rectangles OPA et $C'B'A'$ sont donc égaux et, par suite, $A'C'$ est égal à OA. La droite $D'$ est donc tangente à la sphère de centre $A'$ et qui passe par O; $D'$ engendre dès lors un conoïde de Wallis.

Application aux congruences. — I. *La transformation laisse invariante toute congruence isotrope de Ribaucour relative à un réseau isothermique d'une sphère de centre* O. Considérons une sphère de centre O rapportée à un système isothermique $(u, v)$ :

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2).$$

Sur la tangente en $m$ à la courbe $(u)$, portons

Fig. 3.




$mM_1 = \lambda$; menons par $M_1$ la parallèle au rayon $Om$; cette droite est le rayon d'une congruence isotrope (théorème de Ribaucour). Appliquons la transformation relative au point O. Prenons sur cette droite un vecteur D; $\delta$ est sur $Om$; comme les courbes $(u)$ et $(v)$ sont orthogonales sur la sphère, D vient en D′ et D′ est le rayon de la congruence relatif à la courbe $(v)$.

Bien entendu, le même théorème peut être démontré analytiquement. Soient $u$, $v$ les paramètres d'une droite de la congruence, E, F, G, $e$, $f$, $f'$, $g$ les coefficients des deux formes différentielles de la congruence; pour une congruence isotrope, on a

$$\frac{e}{E} = \frac{f+f'}{2F} = \frac{g}{G}.$$

Choisissons pour paramètres $u$, $v$ ceux des génératrices de la sphère; E et G sont nuls. D'où les conditions pour qu'une congruence soit isotrope

$$\sum \frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v} = 0,$$

$x_0$, $y_0$, $z_0$ étant les coordonnées du point de départ et $p_1$, $p_2$, $p_3$ les cosinus directeurs du rayon. Choisissons pour point de départ la projection de O sur le rayon

$$x_0 = p_3 p_5 - p_2 p_6, \qquad \ldots;$$

nous avons alors

$$\sum \frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u} = -i\sum \frac{\partial p_4}{\partial u}\frac{\partial p_1}{\partial u}, \quad \sum \frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v} = i\sum \frac{\partial p_4}{\partial v}\frac{\partial p_1}{\partial v}.$$

Appliquons la transformation; les nouveaux paramètres sont liés aux anciens par les formules

$$uv' = -1, \qquad vu' = -1;$$

d'où

$$\sum \frac{\partial p'_1}{\partial u'}\frac{\partial x'_0}{\partial u'} = -\frac{1}{u'^4}\sum \frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial p_4}{\partial v},$$

$$\sum \frac{\partial p'_1}{\partial v'}\frac{\partial x'_0}{\partial v'} = -\frac{1}{v'^4}\sum \frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial p_4}{\partial u}.$$

De la comparaison de ces diverses formules résulte la vérification du théorème.

Comme application, on peut démontrer qu'en général, dans un complexe donné, il n'y a pas de congruence isotrope.

II. *A une congruence de normales ne correspond pas une congruence de normales; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les droites* (D) *soient les normales à une famille de surfaces de M. Appell ayant le point* O *pour développée moyenne.*

Considérons en effet une droite D de cosinus directeurs $p_1$, $p_2$, $p_3$; soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées de la projection de O sur D. Pour que les deux congruences transformées soient des congruences de normales, il faut que les expressions

$$\begin{aligned} U &= p_1\,dx_0 + p_2\,dy_0 + p_3\,dz_0,\\ U' &= p'_1\,dx'_0 + p'_2\,dy'_0 + p'_3\,dz'_0 \end{aligned}$$

soient des différentielles totales. Or

$$U' = -(p_1\,dp_4 + p_2\,dp_5 + p_3\,dp_6) = p_4\,dp_1 + p_5\,dp_2 + p_6\,dp_3.$$

Introduisons les coordonnées de Bonnet, c'est-à-dire définissons une des surfaces dont les normales constituent la congruence D comme enveloppe du plan

$$X(u+v) + iY(v-u) + Z(uv-1) = \varpi(uv+1);$$

on a

$$(p_4, p_5, p_6) = \frac{i}{2}(1+uv)^2\left[\frac{\partial(\varpi, p_1)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(\varpi, p_2)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(\varpi, p_3)}{\partial(u,v)}\right],$$

d'où, en désignant par $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ les dérivées partielles de la fonction $\varpi$ de $(u, v)$,

$$\begin{aligned} U' &= \frac{i}{2}(1+uv)^2\sum\left(p\frac{\partial p_1}{\partial v} - q\frac{\partial p_1}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial u}du + \frac{\partial p_1}{\partial v}dv\right)\\ &= i(p\,du - q\,dv). \end{aligned}$$

La condition pour que $U'$ soit une différentielle totale est donc

$$s = 0;$$

c'est l'équation des surfaces de M. Appell.

Application aux complexes. — Pour qu'un complexe soit invariant, il faut et il suffit que O soit centre de symétrie pour le complexe et que tous les cylindres du complexe soient de révolution.

*Le complexe de Painvin, pour une quadrique de centre* O, *est invariant.* Considérons le complexe de Painvin des droites par lesquelles passent deux plans tangents rectangulaires à une quadrique à centre O; étant donné un cylindre du complexe, menons par O le plan perpendiculaire à la direction de ce cylindre. Ce plan coupe la quadrique suivant une conique de centre O; il coupe les plans tangents menés à la quadrique par une génératrice du cylindre suivant deux tangentes rectangulaires à la conique issues de la trace de la génératrice sur le plan : la trace du cylindre est, par suite, le cercle orthoptique de cette conique. Le cylindre est de révolution et son axe passe par O. D'où le théorème, qui résulte aussi de l'équation du complexe de Painvin.

La démonstration de ce théorème met en évidence une propriété de la surface qui limite la région de l'espace occupée par les projections de O sur les rayons du complexe de Painvin (*surface des vitesses normales* de l'Électroptique, dans le cas de l'ellipsoïde) : cette surface limite la région de l'espace occupée par les cercles orthoptiques des sections planes diamétrales de la quadrique [1].

---

[1] *Cf.* la question analogue (pour *toutes* les sections planes)

*Le complexe*

$$(B - C)\frac{p_1}{p_4} + (C - A)\frac{p_2}{p_5} + (A - B)\frac{p_3}{p_6} = 0$$

(auquel appartiennent les génératrices des quadriques homofocales et homothétiques) *est invariant.*

Le complexe

$$(B - C)\frac{p_4}{p_1} + (C - A)\frac{p_5}{p_2} + (A - B)\frac{p_6}{p_3} = 0$$

(polaire réciproque du précédent, par rapport à une sphère) est transformé en le *complexe tétraédral*

$$\Sigma \alpha p_1 p_4 = 0.$$

Le *complexe linéaire spécial* est transformé en le *complexe des droites équidistantes de deux points.*

Complexe transformé du complexe *des droites sur lesquelles la projection de O se fait en un point d'une surface donnée* S : le complexe est constitué par les *tangentes aux cercles transformés apsidaux des divers points de* S, dans la transformation apsidale définie par O.

Étude de la transformation de droites du point de vue de la théorie des transformations de contact. — La transformation n'est pas de contact : à deux droites qui se rencontrent, ne correspondent pas deux droites se rencontrant. A deux droites (D, Δ) se rencontrant, ne correspondent des droites se rencontrant que si, D étant donnée, Δ appartient à une congruence, intersection d'un complexe linéaire spécial avec un complexe du deuxième ou du quatrième ordre, suivant que D passe par O ou non. Dans le premier

---

n° 1765 des *Nouvelles Annales* (1897, Mannheim), et la solution de M. R. Bricard (1907).

cas, la congruence est celle des droites issues de O. Dans le second cas, elle a pour *nappes focales la droite* D *et la sphère de centre* O *tangente à* D.

La démonstration analytique est simplifiée en prenant pour équations réduites d'une telle congruence

$$p_6 = -ap_2, \qquad p_2p_4 - p_1p_5 = -ap_1.$$

Tenant compte de la relation

$$p_1p_4 + p_2p_5 = -p_3p_6,$$

il vient

$$\begin{aligned}(p_1^2 + p_2^2)(p_4^2 + p_5^2) &= a^2(p_1^2 + p_2^2p_3^2),\\ (p_1^2 - p_2^2)(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) &= a^2(p_1^2 + p_2^2p_3^2 + p_2^2p_1^2 + p_2^4)\\ &= a^2(p_1^2 + p_2^2);\end{aligned}$$

la solution $p_1^2 + p_2^2 = 0$ correspond aux parallèles à D. L'équation

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = a^2$$

exprime que les rayons de la congruence touchent une sphère de centre O, de rayon $a$.

Ceci résulte encore du théorème suivant de Géométrie qu'il est aisé d'établir : *Soient deux vecteurs tangents à un cercle tracé sur une sphère de centre* O *et de même sens par rapport à la circulation sur la circonférence; les vecteurs se transforment en deux autres tangents à un cercle de la sphère dont le plan est parallèle à celui du premier.*

Corollaires et applications. — *La surface transformée d'un conoïde de Wallis circonscrit à une sphère de centre* O *est de même nature.*

Appelant *demi-hyperboloïde* une série réglée d'un hyperboloïde réglé, la *surface transformée d'un demi-hyperboloïde de révolution d'axe passant par* O *est une surface de même nature; elle peut dégénérer en un cône.*

*A une série développable (autre qu'un cône) circonscrite à une sphère de centre* O, *correspond une série de même nature.*