Nouvelles annales de mathématiques

Hadamard

Notions élémentaires sur la géométrie de situation

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 193-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__193_0>

[Q3a]

NOTIONS ÉLEMENTAIRES SUR LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION (1);

Par M. HADAMARD.

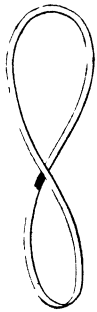
1. Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à considérer des surfaces (ou, incidemment, des lignes). Des considérations analogues, mais plus compliquées, peuvent d'ailleurs se développer pour des volumes ou des figures à un nombre quelconque de dimensions.

Il pourra arriver que les surfaces ou lignes ainsi envisagées présentent des lignes doubles en lesquelles se croisent plusieurs nappes, des points doubles en lesquels se croisent plusieurs branches. Mais, lorsqu'il en sera ainsi, nous admettrons toujours que les parties qui se croisent sont en réalité parfaitement distinctes. Si, par exemple, une ligne a la forme d'un 8, tout se passera dans nos raisonnements comme si cette ligne était en réalité une corde (*fig.* 1) dont les deux brins passent *au-dessus* l'un de l'autre et non l'un à travers l'autre. Quoique ne pouvant pas être figurée de la même façon, la convention sera la même pour deux nappes de surface se traversant : il sera bien entendu qu'un point mobile sur la surface ne pourra pas passer d'une nappe à l'autre en un point de la ligne de croisement.

(1) Les notions d'*ordre de connexion* et de *genre* ont été portées, cette année, au programme de l'Agrégation des sciences mathématiques. Il nous a paru utile de présenter aux lecteurs et en particulier aux candidats les résultats fondamentaux de cette théorie.

Tout point de cette dernière ligne représente, en réalité, *deux* points différents de la surface.

Fig. 1.



2. La *Géométrie de situation* (ou encore *Analysis situs*) est une branche de la Géométrie dans laquelle on ne regarde pas deux figures comme différentes lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue, sans déchirure ni soudure.

Ainsi, nous regarderons comme entièrement équivalentes l'une à l'autre, dans tout ce qui va suivre, l'aire d'un cercle et celle de n'importe quelle autre portion de plan limitée par une ligne fermée unique (et sans point double) : par exemple, celle d'un polygone convexe quelconque. Car toutes ces aires peuvent être ramenées les unes aux autres par déformation continue.

De même, l'aire d'une sphère ne différera pas, à notre point de vue, de celle d'un ellipsoïde ou de celle d'un polyèdre convexe quelconque.

Par contre, il n'est pas possible de passer continûment (sans déchirure ou soudure) de l'aire d'un cercle à l'aire d'une couronne circulaire : ces deux figures sont différentes au point de vue de la Géométrie de situation.

De même, on ne peut pas passer continûment de l'aire d'une sphère à celle d'un tore : il est clair qu'une déformation continue ne peut pas (toujours à moins de soudure) faire disparaître le *trou* que présente cette dernière surface. La sphère et le tore sont donc des êtres différents pour la Géométrie de situation.

Deux figures équivalentes entre elles au sens qui vient d'être expliqué sont encore dites *homéomorphes*. On dit aussi qu'elles ont *la même connexion* (1).

3. Une figure F étant homéomorphe à une autre F′, faisons subir à F une des déformations continues (2) qui l'amènent en F′. Chaque point M de F est ainsi transformé en un point déterminé M′ de F′. Nous avons dès lors réalisé entre les deux points M et M′ pris respectivement dans les deux figures une correspondance qui jouit des propriétés suivantes :

1° Elle est *biunivoque,* c'est-à-dire qu'à chaque position du point M correspond une position du point M′ et qu'inversement, à chaque position du point M′ correspond une position, et une seule, du point M;

2° Elle est *continue,* c'est-à-dire que, lorsque le point M varie continûment, il en est de même du point M′, et inversement.

Cette dernière propriété est une conséquence de ce que notre déformation a eu lieu sans déchirure ni soudure.

---

(1) On devra tenir compte de la convention faite plus haut relative aux croisements. Ainsi, une courbe en 8 est équivalente, sous notre point de vue, à une circonférence : car la corde représentée figure 1 peut évidemment être ramenée par continuité à la forme circulaire.

(2) Il existe toujours une infinité de telles déformations du moment qu'il en existe une

Réciproquement, *si, entre deux figures* F, F′ *existe une correspondance point par point possédant les deux propriétés précédentes, ces deux figures sont homéomorphes.*

Soient, en effet, M, M′ deux points correspondants quelconques : considérons un point mobile m qui, parti de M à l'instant $t = 0$, arrive en M′ à l'instant $t = 1$; et, à chaque couple de points homologues M, M′ faisons correspondre un tel mouvement. Nous pourrons évidemment choisir ces mouvements de manière qu'à chaque instant déterminé t le point m varie continûment avec M et M′. Il suffira de supposer que les mouvements en question sont tous rectilignes et uniformes : le point m s'obtiendra alors en joignant MM′ et portant sur cette droite un segment $\overline{Mm} = t.\overline{MM'}$.

Dès lors, la variation de la figure f, lieu du point m pour t donné, constitue une déformation continue de F en F′, sans déchirure ni soudure (avec ou sans les croisements dont il a été question au n° 1).

Donc l'existence d'une correspondance biunivoque et continue entre les points des deux figures est une *condition nécessaire et suffisante d'homéomorphie.*

Elle constitue une *nouvelle définition de l'homéomorphie,* entièrement équivalente à celle dont nous sommes partis.

4. Cette nouvelle définition va nous permettre de donner à la notion précédente une extension importante.

Considérons un être mathématique quelconque (ligne droite ou courbe, fonction, etc.) susceptible de varier continûment. Pour fixer les idées, nous allons nous adresser à une droite mobile dans l'espace ; mais il est bien entendu que tout ce que nous allons dire subsiste, quelle que soit la nature de l'objet variable.

Supposons qu'une droite variable de l'espace ordinaire dépende (continûment) de p paramètres ($p = 1, 2, 3, 4$). Nous dirons qu'elle décrit une *variété à p dimensions*. Chaque position déterminée de la droite sera dite un *point* déterminé de la variété en question [1].

Il est clair que, dans le cas de $p = 2$, par exemple, on ne saurait établir de relation d'homéomorphie entre une variété de l'espèce précédente et une surface au sens du n° 2.

Mais une telle relation peut, au contraire, parfaitement exister au sens du numéro précédent.

S étant une surface convenablement choisie, il pourra fort bien arriver qu'à chaque *point* de notre variété — autrement dit à chacune des positions que nous admettons pour notre droite variable — corresponde un point (au sens ordinaire du mot) de S, et que cette correspondance soit biunivoque et continue.

S'il en est ainsi, on dira encore que notre variété et la surface S sont *homéomorphes*.

5. Nous emprunterons à M. Klein un exemple remarquable d'une telle relation.

Considérons deux courbes fermées C, C′, lesquelles seront soit gauches, soit situées dans des plans différents. Joignons un point quelconque p de C à un point quelconque p' de C′ par une droite D. Une telle droite dépend évidemment de deux paramètres : l'un, α, qui fixe la position du point p sur C ; l'autre, β, qui fixe la

---

[1] On ne doit évidemment pas confondre le *point* ainsi défini avec les points ordinaires de la droite, lesquels sont en nombre infini pour une position déterminée de celle-ci.

position de p' sur C'. Elle décrit donc une variété à deux dimensions.

Nous allons voir que *cette variété est homéomorphe à un tore.*

Nous pouvons, en effet, supposer que chacun des paramètres α et β varie de 0 à 2π lorsque le point correspondant décrit entièrement sa courbe fermée (par exemple, si C est un cercle, α pourra être l'angle du rayon qui aboutit en p avec un rayon fixe).

Or, sur un tore donné, la position d'un point est déterminée par deux angles α, β (l'un qui détermine la position d'un cercle méridien, l'autre qui détermine la position du point sur ce méridien) variant de 0 à 2π (la valeur 2π donnant d'ailleurs le même résultat que la valeur 0).

Dès lors, si, à chaque position de la droite D précédemment considérée, nous faisons correspondre le point du tore qui est défini par les mêmes valeurs de α et de β, il est clair que cette correspondance sera parfaitement univoque et continue. Il y a donc homéomorphie.

Cette homéomorphie peut d'ailleurs être traduite en d'autres qui aient lieu au sens du n° 2.

Soit O un point fixe. Abaissons de ce point la perpendiculaire OH sur la droite D. Il est évident que le point H varie continûment avec la position de D.

Donc, lorsque celle-ci décrira la variété précédemment définie, le point H décrira une surface S homéomorphe au tore [1].

---

[1] Il pourra exister des points H qui correspondent à deux positions de la droite D (et qui formeront en général des lignes doubles de S); mais, conformément à la convention du n° 1, un tel point devra être considéré comme l'ensemble de deux points différents de S.

La construction précédente peut d'ailleurs manifestement être variée d'une infinité de façons : on pourrait prendre pour H le pied de la perpendiculaire commune entre D et une droite fixe, ou le milieu de pp' ; etc.

6. Nous nommerons *élément de surface*, ou *élément à deux dimensions*, l'aire d'un cercle ou toute autre variété à deux dimensions homéomorphe à celle-là (en particulier, comme nous l'avons vu, toute portion de plan limitée par une coube fermée unique et sans point double).

De même, nous appellerons *élément de ligne* un segment de droite ou toute autre figure qui lui soit homéomorphe, c'est-à-dire tout arc continu, mais non fermé de ligne droite ou courbe.

7. **Convention fondamentale.** — Nous nous bornerons dans ce qui va suivre aux surfaces (ou lignes) qui vérifient la condition suivante :

Quel que soit le point M pris sur la figure considérée, la partie de celle-ci qui est située au voisinage de ce point a la forme d'un élément.

M peut d'ailleurs être à l'intérieur de cet élément ou (dans le cas d'une surface) sur son contour. Ce second cas se présente si M fait partie du contour ou *bord* ou encore de la *frontière* [1] de la surface considérée S elle-même.

De même, si la figure considérée est une ligne, la partie de celle-ci qui avoisine un de ses points M est un élément de ligne comprenant M ou ayant M comme

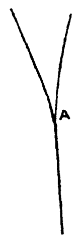
---

[1] Le mot *frontière*, synonyme des deux précédents dans le cas des surfaces, présente sur eux l'avantage de pouvoir s'employer quel que soit le nombre des dimensions.

extrémité, auquel cas M est aussi une extrémité de la ligne considérée elle-même.

Par exemple, nous exclurons de nos considérations une ligne ayant la forme représentée figure 2, car

Fig. 2.



l'hypothèse fondamentale qui vient d'être faite ne serait pas vérifiée au point A de cette figure.

Pour la même raison, les surfaces que nous considérerons ne pourront pas avoir la forme d'un cylindre ayant pour base la ligne en question.

8. Notre surface peut d'ailleurs présenter des formes très variées et des singularités relativement compliquées sans contrevenir à la condition que nous venons de lui imposer.

Rien ne l'empêche d'admettre des lignes doubles (du moment que la convention du n° 1 est respectée).

Elle peut, d'autre part, présenter des points coniques. La surface latérale ou la surface totale d'un cône, la surface totale ou partielle des polyèdres usuels [1], font partie de celles que nous pourrons avoir à étudier.

---

[1] Notre condition fondamentale ne serait pas vérifiée dans le cas d'une pyramide ayant pour base l'espace annulaire compris entre deux polygones plans intérieurs l'un à l'autre, puisqu'au sommet S

Considérons encore, avec Riemann, un point variable, que nous prendrons d'abord sur le plan des xy, et dont les coordonnées polaires seront ρ, ω ; ρ variant de 0 à 1, *et* ω *de* 0 *à* 4π.

Ce point est intérieur au cercle de rayon 1 qui a pour centre l'origine et prend toutes les positions possibles dans ce cercle. Mais, de plus, chacune de ces positions (le centre excepté) est occupée deux fois. A tout point M du cercle en question correspondent une seule valeur de ρ, mais deux valeurs de ω, l'une comprise entre 0 et 2π, l'autre entre 2π et 4π.

Nous considérerons ces deux systèmes de valeurs de ρ, ω comme définissant, en réalité, *deux* points distincts M_1, M_2, et, pour les distinguer l'un de l'autre, nous placerons le premier M_1 (celui qui correspond à $0 < \omega < 2\pi$) un peu au-dessus du plan des xy, l'autre M_2 ($2\pi < \omega < 4\pi$) un peu au-dessous de ce plan. Toutefois, la distance de ces points au plan des xy s'annulera pour $\omega = 2\pi$, de manière que l'un d'eux varie continûment (en passant du dessus au dessous du plan) lorsque ω traverse cette valeur 2π. Il en sera de même pour $\omega = 0$ et $\omega = 4\pi$, et, de plus, le point (ρ, 4π) ne sera pas regardé comme distinct du point (ρ, 0), de manière qu'il y aura aussi passage continu du dessous au dessus du plan pour $\omega = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 4\pi \end{smallmatrix} \right\}$. Le bord unique de l'aire S_1 correspondra donc exclusivement à $\rho = 1$.

On satisfera, par exemple, à toutes ces conditions en prenant pour cote d'un point de S_1 la quantité repré-

---

de cette pyramide existeraient deux angles polyèdres différents, à moins d'opérer comme au n° 1 et de considérer S comme représentant deux points distincts, sommets respectifs des angles polyèdres en question.

sentée en grandeur et signe par l'expression

$$(1) \qquad \varepsilon\rho \sin\frac{\omega}{2},$$

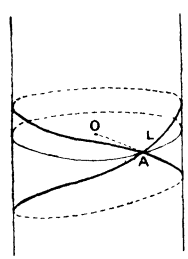
ε étant une quantité positive très petite, ou encore, ce qui revient au même à notre point de vue, par l'expression

$$(1') \qquad \varepsilon\sqrt{\rho}\sin\frac{\omega}{2},$$

dans laquelle le radical est pris positivement.

On aura ainsi une nappe de surface conique dans le cas de l'expression (1), une surface analogue, mais à génératrices curvilignes, dans le cas de l'expression (1'), ayant pour sommet l'origine O et pour base une courbe L telle que celle qui est représentée figure 3,

Fig. 3.



ayant par conséquent pour ligne double le segment de droite OA (dans lequel A a pour coordonnées 1, 0, 0).

Si compliquée qu'elle soit en apparence, une telle aire S_1 est un élément de surface. *Elle correspond, en effet, d'une manière parfaitement biunivoque et continue à celle qui est décrite par le point m de coordonnées polaires* $\sqrt{\rho}, \frac{\omega}{2}$ (ρ et ω variant dans les mêmes conditions que tout à l'heure), *laquelle n'est* *autre que le cercle de rayon 1 dont nous sommes partis.*

Si l'on considère le point M comme représentant, à la manière habituelle, une imaginaire Z et le point m comme représentant une imaginaire z, celle-ci est liée à la première par la relation $z = \sqrt{Z}$.

L'expression ($1'$) représente, au facteur ε près, le coefficient de i dans la valeur de z.

9. Plus généralement, supposons la variable imaginaire z liée à la variable imaginaire Z par la relation

$$(2) \qquad z = \sqrt{R(Z)} = \sqrt{(Z - a_1)(Z - a_2)\ldots(Z - a_n)},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes distinctes (¹).

Nous considérerons les valeurs de Z comprises à l'intérieur d'un certain cercle C, lequel comprendra tous les points $a_1, \ldots, a_n$.

A chacune d'elles correspondront deux valeurs de z. Cette dernière quantité, lorsque Z décrit un contour fermé, revient ou non, comme on sait, à sa valeur primitive suivant que ce contour contient à son intérieur un nombre pair ou un nombre impair de points a.

Si, en particulier, on décrit le cercle C, il y aura permutation ou non suivant que n sera impair ou pair.

M étant le point représentatif de Z sur le plan des variables complexes, portons, perpendiculairement à ce plan, à partir de M, une cote égale (en grandeur et signe) à $\varepsilon z''$, ε étant encore une quantité positive très

(¹) Si a_2, par exemple, était égal à a_1, on pourrait faire sortir du radical le facteur $Z - a_1$. Les propriétés de la surface déduite de la relation (2) par les moyens indiqués dans le texte ne seraient pas distinctes, à notre point de vue, de celles auxquelles on arriverait en supprimant le facteur en question : il y aurait homéomorphie entre les deux surfaces obtenues.

petite et z'' le coefficient de i dans la valeur

$$z = z' + iz''$$

de z.

Nous obtenons ainsi une *surface de Riemann* [1] S, laquelle a, comme on le voit, deux points projetés suivant un point quelconque M intérieur à C.

Il est aisé de voir qu'une telle surface vérifie la condition que nous avons posée au n° 7.

Considérons, en effet, un petit cercle γ du plan des Z.

Si ce cercle γ ne contient aucun des points-racines a, les valeurs de z ne se permuteront pas dans l'intérieur de γ. Ce seront, dans le cercle γ, deux fonctions analytiques, entièrement distinctes, de Z. Seront dès lors projetés suivant γ deux éléments de surface faisant partie de S, l'un sur lequel la cote sera le coefficient de i dans z_1, l'autre [2] ayant pour cote le coefficient de i dans z_2.

Supposons, au contraire, que γ contienne à son intérieur le point a_1.

Alors la partie Σ de S, projetée suivant γ, aura la

---

(1) La définition usuelle des surfaces de Riemann, telle qu'on est conduit à la donner dans la théorie des fonctions algébriques, est un peu différente de la précédente. Elle s'en distingue (*voir* PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 419) en ce que, moyennant une transformation par rayons vecteurs réciproques, on remplace le plan par une sphère et la surface que nous considérons dans le texte par une surface fermée.

La définition des surfaces de Riemann s'étend d'elle-même au cas où z est lié à Z par une relation algébrique quelconque.

(2) Il y aura croisement entre les deux éléments en question si γ renferme des points où z est réel. On aura encore, dans ce cas, à appliquer la convention du n° 1. La surface renferme donc une série de lignes le long desquelles les deux feuillets se croisent. Chacune de ces lignes de croisement est, en général, issue d'un des points $a_1, \ldots, a_n$ et terminée en un autre de ces points.

forme S_1 décrite au numéro précédent. On peut, en effet, écrire

$$\sqrt{R(Z)} = \sqrt{(Z - a_1)R_1(Z)}$$

et supposer qu'on ait pris d'une manière déterminée le signe du second radical (lequel ne s'annule pas pour $Z = a_1$). $R_1(Z)$ est d'ailleurs (si γ est très petit) sensiblement égal à une constante, et Σ_1 est homéomorphe à la surface qu'on obtient en remplaçant $R_1(Z)$ par l'unité, laquelle est visiblement égale à S_1.

10. Non seulement nous admettons que le voisinage d'un point quelconque de notre surface a la forme d'un élément; mais, d'une manière plus précise, nous admettrons que cette surface est divisible en un nombre fini de portions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_F$ dont chacune a la forme d'un élément [1].

L'une quelconque de ces portions ou *faces*, Σ_1 par exemple, sera bornée, soit par les portions voisines, soit par le bord de la surface. Nous aurons donc, dans son contour, à distinguer plusieurs parties ou *arêtes*, le long de chacune desquelles (à moins qu'il ne s'agisse d'une arête du bord) Σ_1 sera contiguë à une seule et même face voisine [2], le nombre total des arêtes ainsi distinguées étant fini. Cela revient à dire que notre surface pourra être considérée comme une *surface polyédrale*, ne différant de la surface d'un polyèdre ordinaire (ou d'une portion de cette surface) qu'en ce que

[1] Cette hypothese n'est pas, au fond, plus restrictive que la première. Mais nous ne nous arrêterons pas à démontrer qu'il en est ainsi.

[2] Par contre, rien ne nous empêchera de subdiviser au besoin une telle arête, faisant partie du bord ou le long de laquelle Σ_1 sera contiguë à une et une seule face voisine, en deux ou plusieurs parties considérées comme autant d'arêtes distinctes.

les faces et les arêtes seront, en général, courbes [1].

On peut bien aisément, par exemple, mettre sous forme d'un tel polyèdre la surface de Riemann définie au numéro précédent. Il suffira, en général, de mener les rayons qui passent par les points a_k. On décompose ainsi (dans le plan des Z) C en n secteurs qui donnent chacun deux faces de S.

11. Orientation d'une aire. — Un plan a, dans l'espace ordinaire, deux côtés ; et il en est de même, plus généralement, d'une petite portion de surface régulière quelconque.

On sait que la distinction entre ces deux côtés est équivalente à celle de la droite et de la gauche sur le plan ou la surface en question. Soient, en un point M de cette dernière, Mn, Mn' deux petits segments de lignes ayant pour tangente (s'ils sont courbes) les *demi-droites* Mt, Mt'; on pourra dire si la direction du second segment est à droite ou à gauche de celle du premier, dès qu'on aura spécifié le côté où l'observateur est censé se placer pour les regarder.

Soit un petit contour fermé (sans point double) tracé sur la surface autour de M. On peut encore remplacer le choix d'un côté de la surface ou la définition de la droite et de la gauche sur elle par l'indication, sur ce contour, du sens de parcours qu'on considérera comme *direct* : on sait, en effet, qu'on appelle ainsi le

---

[1] Toutefois, contrairement à ce qui se passe pour les polyèdres ordinaires (ou, du moins, pour les polyèdres convexes), il pourrait arriver : 1° qu'une face soit contiguë *à elle-même,* suivant une arête; 2° qu'elle soit contiguë à une même face voisine suivant deux arêtes *non consécutives.* Mais chacune de ces deux circonstances peut toujours être évitée en subdivisant, s'il y a lieu, les faces. Au reste, ni l'une ni l'autre ne compromettent les raisonnements qui vont suivre.

sens dans lequel il faut décrire le contour pour avoir l'aire intérieure à gauche.

Si l'on a choisi un côté de la surface ou défini la droite et la gauche au point M, ou indiqué, autour de ce point, un sens de parcours considéré eomme direct, on dira que cette surface est *orientée* en M.

Il importe de remarquer que, sous l'une des deux dernières formes, cette définition s'étend aux *variétés* telles que nous les avons envisagées au n° 4.

12. Surfaces (ou variétés) bilatères et unilatères. — Un élément de notre surface étant orienté d'une manière arbitraire, on peut convenir d'orienter de même un élément voisin : convention dont le sens est clair si les deux éléments sont suffisamment rapprochés.

Ou encore, si l'on a orienté une face (n° 10) Σ_1 de notre surface, on peut convenir d'orienter de même une face contiguë à la première suivant une arête : cela consistera à choisir les parcours directs, sur les contours respectifs de ces deux faces, de manière que les sens de description de l'arête commune soient *contraires* dans les deux cas.

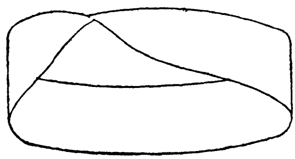
De celle-ci, on peut de même passer à une suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait orienté toute la surface ou toute la variété (l'une ou l'autre étant supposée d'un seul tenant).

Seulement, il faut pour cela qu'on ne rencontre jamais de contradictions : autrement dit, l'orientation obtenue pour une face déterminée Σ_k devra être la même quelle que soit la série de faces intermédiaires contiguës les unes aux autres, par laquelle cette face Σ_k aura pu être atteinte en partant de la face primitive Σ_1.

S'il en est ainsi, la surface ou la variété est dite *bilatère :* tel est évidemment le cas d'une sphère, qui a un côté interne et un côté externe.

Mais l'hypothèse contraire peut fort bien se présenter. Un exemple classique en est fourni par la bande de papier de Möbius (*fig.* 4) : celle-ci est obtenue en

Fig. 4.



partant d'un rectangle ABCD et soudant l'un à l'autre les côtés opposés AB, CD, mais après une torsion de 180° telle que chacun des sommets A, B vienne en coïncidence *avec celui qui lui était primitivement opposé*. Il est clair que, si l'on part d'un point P de AB en se plaçant d'un certain côté de la surface, on se trouvera du côté opposé lorsqu'on reviendra au point P en franchissant le côté CD. La surface est alors dite *unilatère*.

13. Une figure classique en Géométrie élémentaire est une variété unilatère. Nous voulons parler du *plan projectif*.

On sait qu'en Géométrie projective on ne regarde pas comme essentiellement différentes une figure tracée dans un plan Π et la perspective de cette même figure sur un autre plan Π' avec un point de vue quelconque O.

Tout rayon issu de O est alors regardé comme coupant Π en un point déterminé, même s'il est parallèle à Π. Le plan Π est donc une variété homéomorphe à celle qui est formée par les différentes droites qui passent par O (chacune d'elles étant regardée comme un *point*).

Si l'on avait affaire aux diverses *demi-droites* issues de O, on aurait une variété homéomorphe à une sphère, savoir : la sphère de rayon 1 qui a O pour centre et qui est coupée par chacune de ces demi-droites en un point M et en un seul.

Mais, à notre point de vue, au contraire, deux demi-droites en prolongement l'une de l'autre ne sont pas regardées comme distinctes. Donc, *le plan projectif équivaut, en Géométrie de situation, à une sphère dans laquelle deux points diamétralement opposés* M_1, M_2 *sont considérés comme formant un seul et même point.*

Il est, dès lors, clair que cette variété est unilatère, car, si le point M_1 décrit une figure quelconque, le point M_2 décrit une figure symétrique, dont on sait que l'orientation est inverse.

14. Malgré cela, les surfaces unilatères — qu'on peut, dans beaucoup de cas, ramener aux surfaces bilatères en considérant les deux côtés de l'une d'elles comme deux nappes distinctes (¹) — se présentent assez rarement dans les applications. Nous supposerons toujours dans ce qui va suivre qu'il s'agit de surfaces ou variétés bilatères.

15. Classification des lignes. — Il est manifeste que, au point de vue de la Géométrie de situation, les lignes (d'un seul tenant et satisfaisant à l'hypothèse du n° 7) sont de deux espèces et de deux seulement :

(¹) La sphere est déduite de la variété du n° 1 par cette transformation, puisque M_1 et M_2 correspondent à un point unique de cette variété avec les deux orientations possibles en ce point.

Ligne ouverte AB, qui n'est autre chose que ce que nous avons appelé plus haut *élément de ligne ;*

Ligne fermée (ex : circonférence de cercle).

16. **Cas des surfaces. Sections.** — Considérons maintenant les surfaces (ou les variétés à deux dimensions). Nous supposerons celles-ci d'un seul tenant.

Traçons, sur une surface donnée, une ligne déterminée L. Nous pouvons imaginer que, suivant cette ligne, on *sectionne* la surface avec des ciseaux.

Après une telle section, la ligne L fait partie du contour de la surface, et cela à double titre, car les deux lèvres de la section doivent être maintenant considérées comme deux régions entièrement séparées.

Nous considérerons surtout des *sections transverses,* c'est-à-dire des sections suivant des lignes L partant du bord et y aboutissant : c'est à elles que nous réserverons le nom de *sections,* lorsqu'il n'en sera pas spécifié autrement.

Nous supposerons également que ces lignes L seront sans points doubles et, provisoirement, que leurs extrémités seront des points distincts de la frontière.

Deux cas peuvent alors se présenter.

En général, par une section transverse, la surface sera *morcelée,* c'est-à-dire que, supposée d'un seul tenant avant la section, elle cessera de l'être après. C'est, en particulier, ce qui se produit nécessairement pour la surface d'un cercle ou tout autre élément de surface.

Mais il peut en être autrement pour d'autres formes de la surface considérée.

17. **Surfaces** (ou variétés) **simplement connexes.** — Nous supposerons tout d'abord que notre surface ait,

au moins, un bord. Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il s'agissait d'une surface fermée, nous en introduirions provisoirement un en *ponctuant* la surface, c'est-à-dire en en détachant une portion infiniment petite autour d'un point. Il revient d'ailleurs au même d'en détacher un élément de surface quelconque (lequel peut, d'une manière continue, se réduire à être infiniment petit) : par exemple, une face, si la surface est considérée comme polyédrale à la façon du n° 10.

Cela posé, une surface est dite *simplement connexe* si l'on ne peut y pratiquer une section transverse (suivant la définition précédente) sans la morceler.

Tout élément de surface est simplement connexe.

On démontre (et nous admettrons) que la réciproque est vraie; et même que, si une surface polyédrale S est telle qu'on ne puisse y pratiquer une section *composée d'arêtes de la surface* sans la morceler, S est un élément de surface [1].

18. Théorème d'Euler pour les surfaces simplement connexes. — *Dans toute surface polyédrale ouverte simplement connexe, on a*

$$F + P = A + 1, \tag{3}$$

F, A, P *désignant respectivement le nombre des faces, celui des arêtes et celui des sommets.*

Le théorème est évident pour $F = 1$, puisqu'on a manifestement alors $P = A$.

Nous le supposerons donc encore démontré pour

---

[1] Cette démonstration se fait en supposant la proposition démontrée pour toutes les surfaces polyédrales à moins de k faces et prouvant, dans ces conditions, qu'elle est nécessairement vraie pour les surfaces à k faces.

$F < k$ et prouverons dans ces conditions qu'il est encore nécessairement vrai pour $F = k$.

A cet effet, nous sectionnerons la surface par un chemin L composé d'arêtes, partant d'un point A du bord et aboutissant en un autre point B de ce bord ([1]). Nous la diviserons ainsi en deux éléments S', S'' composés chacun de moins de k faces et pour lesquels, par conséquent, nous regardons le théorème comme démontré. Si donc F', A', P', F'', A'', P'' sont les nombres de faces d'arêtes et de sommets de S' et de S'', on aura

$$F' + P' = A' + 1, \qquad F'' + P'' = A'' + 1.$$

Mais on a aussi

$$F' + F'' = F.$$

D'autre part, si la section L se compose de λ arêtes, elle a $\lambda + 1$ sommets, puisqu'elle est ouverte. Comme chacune de ces arêtes et chacun de ces sommets comptent double après la section, on peut écrire

$$A' + A'' = A + \lambda, \qquad P' + P'' = P + \lambda + 1.$$

Des égalités précédentes on tire bien l'égalité (3).

C. Q. F. D.

19. Nous verrons tout à l'heure qu'une surface fermée est dite *de genre zéro* si, une fois ponctuée, elle donne une surface ouverte simplement connexe.

Théorème d'Euler pour les surfaces fermées de genre zéro. — *Sur une surface fermée de genre zéro, on a* ([2])

$$F + P = A + 2.$$

([1]) On s'assurera aisément qu'un tel chemin existe toujours.

([2]) Cette formule se trouve déjà énoncée dans Descartes, d'après une indication que je dois à l'obligeance de M. Fontené.

Car, par définition, une surface fermée de genre zéro se déduit d'une surface ouverte simplement connexe ($F + P = A + 1$) par l'addition d'une face unique, laquelle n'apporte aucune arête ni aucun sommet nouveau.

La surface d'un polyèdre convexe ordinaire est une surface fermée de genre zéro : si l'on en enlève une face, la partie restante peut être déformée continûment de manière à venir s'appliquer sur la face enlevée. *Donc le théorème d'Euler, sous la forme qui vient d'être donnée, s'applique aux polyèdres convexes.*

20. Si l'on divise en deux, par une section transverse *mn*, une face Σ_1 d'une surface polyédrale quelconque S, cette transformation ne change pas le nombre $F + P - A$ relatif à Σ_1 (lequel doit rester égal à 1, d'après ce qui précède).

Elle ne change donc évidemment pas non plus le nombre analogue relatif à la surface totale S.

21. Ordre de connexion d'une surface [1]. — Supposons maintenant que S ne soit pas simplement connexe. Il existe dès lors une section transverse L_1 qui ne la morcèle pas.

Appelons S_1 la surface ainsi sectionnée, et qui est encore d'un seul tenant. Si, à son tour, S_1 n'est pas simplement connexe, elle admettra, elle aussi, une section [2] non morcelante L_2 qui la transformera en une surface S_2, et ainsi de suite.

---

[1] Rappelons encore que toutes nos considérations s'étendent d'elles-mêmes aux variétés à deux dimensions.

[2] Les extrémités de L_2 seront prises sur la frontière de S_1, c'est-à-dire soit sur la frontière de l'aire primitive S, soit sur l'une ou l'autre des lèvres de la section L_1.

Supposons que la surface S_{N-1} obtenue au bout de $N - 1$ sections successives soit encore d'un seul tenant, mais qu'elle soit simplement connexe (de sorte qu'une $N^{\text{ième}}$ section transverse quelconque produise nécessairement le morcellement).

On nomme *ordre de connexion* de la surface l'entier N ainsi obtenu en ajoutant une unité au nombre des sections successives par lesquelles on arrive à la rendre simplement connexe sans la morceler; et l'on dit que la surface est *doublement, triplement...* connexe si son ordre de connexion est deux, trois...

Il n'est pas évident, au premier abord, que cette définition ait un sens précis; car il semble que le nombre trouvé puisse dépendre de la manière dont on choisit les sections successives.

Nous allons prouver qu'il n'en est rien.

C'est ce qui résulte du *théorème d'Euler généralisé* (pour les surfaces ouvertes).

Théorème. — *Pour une surface polyédrale ouverte dont l'ordre de connexion est* N, *on a*

$$F + P - A = 2 - N. \tag{4}$$

Pratiquons, en effet, dans notre surface la première, L_1, des sections dont nous avons parlé. Supposons d'abord que L_1 soit composé d'arêtes de la surface, et soit λ le nombre de ces arêtes, de sorte que le nombre des sommets situés sur L_1 est $\lambda + 1$. Ces arêtes et ces sommets devant, après la section, compter chacun pour deux, toutes choses égales d'ailleurs, le nombre $F + P - A$ va être augmenté d'une unité.

Mais on peut toujours admettre que L_1 est composé d'arêtes de la surface, en considérant comme autant de nouvelles arêtes les segments de L_1 situés dans les faces successives, opération qui ne change pas la valeur de $F + P - A$ (numéro précédent). La conclusion est donc vraie en tout cas.

Chacune des sections successives L_2, ... ajoute de même une unité à la valeur de $F + P - A$. Comme, par hypothèse, au bout de $N - 1$ sections, ce nombre devient égal à 1 (en vertu du nº 18), il était primitivement de $2 - N$. C. Q. F. D.

22. On peut d'ailleurs démontrer que, par un système fini de sections successives, on peut toujours amener une surface polyédrale à être simplement connexe sans la morceler.

Il suffit, pour cela, de nous astreindre à composer les sections successives avec des arêtes de S.

On ne peut alors certainement pas continuer indéfiniment le sectionnement sans morceler, puisque, en sectionnant suivant toutes les arêtes, on isolerait toutes les faces les unes des autres.

Or, lorsque l'opération sera arrêtée, c'est-à-dire lorsqu'on sera arrivé à une surface telle que toute section composée d'arêtes la morcèle, nous avons dit (17) que cette surface sera simplement connexe.

23. Il est donc complètement démontré que *toute surface* vérifiant les hypothèses des nºs 7 et 10 *a un* **ordre de connexion** bien *déterminé.*

Cet ordre est donné soit par sa définition, soit par la formule (4) (théorème d'Euler).

24. *Exemple.* — Soit la *surface de Riemann* S considérée au nº 9.

Pratiquons, dans cette surface, des sections projetées respectivement suivant des lignes $a_k\,b_k$, allant de chacun des points a, *l'un d'eux* (a_1, par exemple) *excepté,* à la circonférence C.

Les sections ainsi définies sont bien des sections transverses. Chacune d'elles a pour extrémités les deux points projetés suivant un même point b_k du cercle C.

Ainsi sectionnée, la surface S est devenue simplement connexe. On peut, en effet, par une déformation continue, réduire S à la portion de S qui est projetée suivant une circonférence de centre a_1. Or celle-ci est (8) un élément de surface.

D'après cela, l'ordre de connexion N cherché est égal à n.

Le théorème d'Euler, appliqué à la décomposition polyédrale du n° 10, donne aisément le même résultat.

25. Nous allons maintenant montrer, du moins pour les surfaces (ou variétés) bilatères [1], que l'ordre de connexion peut être considéré comme la somme de deux quantités dont chacune séparément est invariante par déformation continue.

L'une de ces quantités est le nombre des contours fermés distincts dont se compose la frontière : nombre qui, par exemple, pour la surface de Riemann (n° 9), est égal à deux ou à un, suivant que n est pair ou impair. Un tel nombre r ne change évidemment pas lorsqu'on déforme continûment : il est donc le même pour deux surfaces homéomorphes.

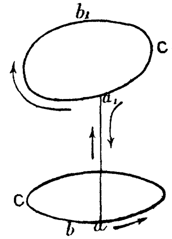
Supposons $r > 1$, de sorte qu'il existe au moins deux bords distincts C, C_1 (*fig.* 5). Si l'on fait une section aa_1 allant d'un de ces bords à l'autre, la surface n'est pas morcelée (car, pour passer d'un côté à l'autre de aa_1, il suffit de faire le tour de C ou celui

---

[1] Ce qui précède à partir du n° 16 est vrai, que la surface soit bilatère ou non.

de C_1); mais les deux bords précédents sont remplacés par un bord unique $a a_1 b_1 a_1 a b a$ (*fig.* 5).

Fig. 5.



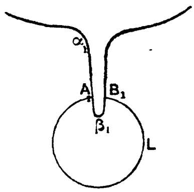
Nous tracerons de même une section allant de C à chacun des autres contours C_2, ..., C_{r-1}. Par ces $r-1$ sections, nous n'aurons pas morcelé la surface; mais nous l'aurons réduite à avoir sa frontière formée d'un seul contour, susceptible d'être décrit d'un trait continu.

26. Supposons donc maintenant que notre surface a un seul bord. Si elle n'est pas simplement connexe, on pourra, sans la morceler, sectionner suivant une certaine ligne L joignant entre eux deux points A_1, B_1 du bord en question. On peut évidemment faire glisser chacun d'eux d'une manière arbitraire sur ce bord.

On peut aussi, d'autre part, entailler la surface suivant une ligne allant d'un point α_1 du bord à un point β_1 pris dans l'intérieur (*fig.* 6) : il est clair qu'une telle entaille peut être considérée comme une déformation continue de la frontière et de la surface elle-même. Les deux lèvres de l'entaille faisant alors partie du bord, plaçons A_1 et B_1 en face l'un de l'autre, respectivement sur ces deux lèvres et dans le voisinage de β_1.

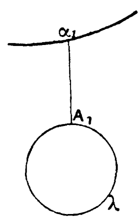
Tout se passera alors comme si nous sectionnions suivant un chemin (*fig.* 6 *bis*) composé de la ligne $\alpha_1 A_1$ et d'une ligne fermée λ_1 partant du point A_1 et y revenant.

Fig. 6.



Une section de cette espèce est dite une *section en sigma*. On voit qu'on peut la ramener à une section transverse.

Fig. 6 *bis*.



Nous venons de supposer que la section en sigma ainsi obtenue ne morcèle pas la surface. Dès lors, il en sera ainsi *a fortiori* si l'on en supprime le trait $\alpha_1 A_1$ de manière à ne sectionner que suivant la ligne fermée λ_1.

Ainsi, *si une surface limitée par un contour unique n'est pas simplement connexe, il existe à son intérieur au moins une ligne fermée suivant laquelle on peut la sectionner sans produire le morcellement.*

27. *Rétrosections.* — Remarquons maintenant qu'*à*

une ligne fermée (sans point double) λ_1, *le long de laquelle on a pu sectionner la surface sans la morceler, on peut adjoindre une seconde ligne fermée* λ'_1 *jouissant de la même propriété.*

En effet, considérons deux points de la surface, infiniment voisins d'un même point o_1 (*fig.* 8) de λ_1, mais de part et d'autre de λ_1. Par hypothèse (puisque λ_1 ne morcèle pas), ces deux points peuvent être joints par un chemin λ'_1 sans point commun avec λ_1.

Lorsque ses deux extrémités viendront se confondre avec o_1, ce chemin deviendra une ligne fermée λ'_1 rencontrant λ_1 en un seul point o_1.

La relation ainsi établie entre λ_1 et λ'_1 est évidemment réciproque. En particulier, λ'_1 est, comme λ_1, une ligne suivant laquelle la surface peut être sectionnée sans être morcelée : il suffit, pour passer d'un côté à l'autre de λ'_1, de suivre le chemin λ_1.

Mais, si la surface est bilatère, le morcellement ne se produit pas non plus si l'on sectionne à la fois suivant λ_1 et suivant λ'_1.

Numérotons, en effet, de I à IV, de la manière qui est indiquée sur la figure 7, les angles formés en o_1 par λ_1 et λ'_1. Si, partant d'un point voisin de o_1 et situé dans l'angle I, on côtoie d'un bout à l'autre λ'_1 sans le traverser, on reviendra aux environs de o_1 sans avoir changé de côté par rapport à λ'_1, c'est-à-dire qu'on se trouvera dans l'angle II. Pour une raison toute semblable, on passera de l'angle II à l'angle III en suivant λ_1, puis de celui-ci à IV en suivant λ'_1 ; et, enfin, on pourra de là revenir à l'angle I en suivant λ_1.

Les quatre angles I-IV peuvent donc être mis en communication les uns avec les autres, et, par conséquent, avec un point quelconque de la surface sans traversée de λ_1 ni de λ'_1.

Lors de la section suivant λ_1, la surface acquiert deux bords nouveaux : les deux lèvres de la section. La section suivant λ'_1 a pour effet de réunir ces deux bords entre eux et, par conséquent (*cf.* n° 25), de les réduire à un seul.

Pour décrire ce dernier d'un bout à l'autre, on voit qu'il faut suivre le chemin par lequel nous avons appris, il y a un instant, à passer de l'angle I aux angles II, III, IV pour revenir ensuite à l'angle I. Chacune des lignes λ_1, λ'_1 est ainsi décrite deux fois en sens inverses, comme le montrent les flèches de la

Fig. 7.

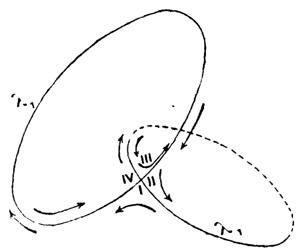


figure 7. C'est ce qui a fait donner à cette figure le nom de *rétrosection*.

Enfin, le bord ainsi déterminé pourra (toujours sans morcellement, en vertu du n° 25) être relié au bord primitif par une section $\alpha_1 A_1$.

L'ensemble des sections $\alpha_1 A_1$, λ_1, λ'_1 représente *deux sections transverses,* savoir : une section en sigma composée de $\alpha_1 A_1$ et de λ_1, et la section λ'_1 qui joint deux points du double bord créé par la précédente.

28. Genre. — Supposons qu'après avoir sectionné à la fois suivant λ_1 et λ'_1, il existe encore une ligne fermée λ_2 (sans point commun avec les premières) le long de laquelle on puisse sectionner sans morcellement.

L'existence de la ligne fermée λ_2 entraînera, d'autre part, celle d'une seconde ligne λ'_2 qui coupe λ_2 en un point unique o_2 et forme avec elle une seconde rétrosection; après quoi l'on pourra ou non, suivant la forme de la surface, en trouver une troisième, et ainsi de suite.

Chacune des rétrosections successives constituera un nouveau bord. On pourra joindre chacun de ces nouveaux bords au bord primitif ou à un des bords créés avant lui (c'est-à-dire à une des rétrosections précédentes) par des lignes $\alpha_1 A_1$, $\alpha_2 A_2$, $\alpha_3 A_3$, ... En sectionnant suivant ces lignes, on ramènera le bord à être unique s'il l'était primitivement.

On appelle **genre** d'une surface le nombre p des rétrosections que l'on peut ainsi opérer, autrement dit *le nombre des couples de lignes fermées* (*deux quelconques de ces lignes ayant un point commun unique si elles sont du même couple, et n'en ayant aucun dans le cas contraire*) *suivant lesquelles on peut sectionner simultanément la surface en la laissant d'un seul tenant.*

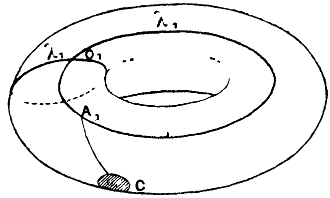
29. *Exemples.* — Un plan, une sphère ont évidemment pour genre *zéro*.

Le type le plus simple de surface à genre non nul est fourni par le TORE (*fig.* 8) ($p = 1$). On peut alors prendre pour λ_1 un méridien et pour λ'_1 un parallèle (*fig.* 8). En sectionnant suivant le méridien λ_1, on obtient un anneau brisé qu'on peut évidemment déformer en la surface latérale d'un cylindre, le parallèle λ'_1 devenant une génératrice de ce cylindre.

En fendant suivant cette génératrice, on transforme la surface en un rectangle (*fig.* 9), dont le contour correspond à la rétrosection (λ_1, λ'_1).

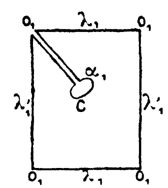
Si, comme nous l'avons fait précédemment (n° **17**), on supposait la surface ponctuée, C (*fig.* 8) étant, par

Fig. 8.



exemple, le contour de la petite portion enlevée, on devrait joindre C à la rétrosection par une ligne $\alpha_1 A_1$.

Fig. 9.



C'est ce qui est supposé sur la figure 9, où l'on a admis, en outre, que le point A_1 coïncide avec o_1.

30. De même, un type de surface de genre p est constitué par un disque (par exemple une pièce de monnaie) percé de p TROUS (*fig.* 10).

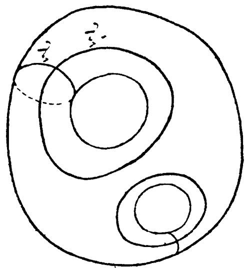
Un contour λ_i est alors celui qui part de la tranche du disque sur une face et y revient par l'autre après avoir passé à travers un trou ; le contour λ'_i correspondant est celui qui fait le tour du même trou (*fig.* 10).

31. Nous avons vu que l'ensemble de chaque rétro-

section et de la section $\alpha_i A_i$ correspondante représente deux sections transverses.

On aura donc, de ce chef, $2p$ sections transverses à opérer dans une surface de genre p.

Fig. 10.



Le nombre r des bords (que l'ensemble des opérations précédentes laisse inaltéré) peut, d'autre part, être réduit à l'unité par $r - 1$ sections, comme nous l'avons vu.

Moyennant les $2p + r - 1$ sections dont nous venons de parler, notre surface est (n° 26) rendue simplement connexe, puisqu'elle a un bord unique et qu'on ne peut pas y tracer de section fermée non morcelante.

Donc *l'ordre de connexion* N *d'une surface bilatère* (satisfaisant aux hypothèses fondamentales) *est donné en fonction du nombre r des bords distincts et du genre p par la formule*

$$N = r + 2p.$$

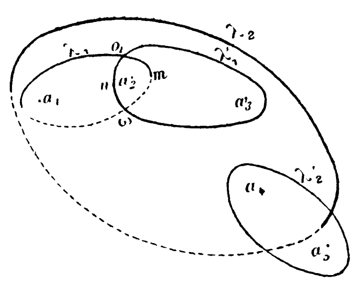
Il résulte de là que *le genre p ne dépend pas du choix des rétrosections*, puisque les nombres N et r sont indépendants de ce choix.

Remarque. — En particulier, il est bien exact, comme nous l'avions énoncé au n° 19, que toute surface fermée qui, ponctuée, donne une surface simplement connexe, est de genre zéro, et réciproquement.

32. *Exemple.* — La *surface de Riemann* considérée au n° 9 a pour ordre de connexion $N = n$; comme elle a 1 ou 2 bords, suivant la parité de n, *son genre p est* $\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, *suivant que n est pair ou impair.*

Il est d'ailleurs aisé d'y tracer un système de p rétrosections. n étant supposé au moins égal à 3 (sans quoi on aurait $p = 0$), un contour λ_1 sera celui qui est projeté suivant une courbe fermée (*fig.* 11) (sans point

Fig. 11.



double) comprenant à son intérieur les deux points d'affixes a_1, a_2 [à l'exclusion de tout autre point-racine de $R(Z)$]. Comme, après description d'une telle courbe, le radical $\sqrt{R(Z)}$ revient à sa valeur primitive, λ_1 se ferme non seulement en projection sur le plan des Z, mais sur la surface elle-même.

Quant à λ'_1, il sera projeté suivant une courbe fermée comprenant a_2 et a_3. Une telle courbe a, avec λ_1, deux points communs o_1, ω (*fig.* 11) en projection, mais un seul ([1]) sur la surface S. On pourra donc appliquer à ces deux courbes tout ce qui a été dit au n° **27** et constituer avec elles une première rétrosection.

On en aura une seconde s'il existe deux nouveaux points-racines a_4, a_5 : elle sera formée de deux lignes fermées dont l'une, λ_2, tourne (en projection) autour des points précédents et de a_1, a_4, l'autre autour de a_4, a_5 (*fig.* 11).

En continuant ainsi, on formera des rétrosections dont le nombre est bien celui qui a été indiqué plus haut.

33. Les considérations qui précèdent nous amènent à la conclusion suivante :

Il existe deux nombres dont chacun a la même valeur pour deux surfaces homéomorphes quelconques (celles-ci satisfaisant à nos hypothèses générales et étant supposées bilatères).

Ces deux nombres sont le *nombre r des bords distincts* et le *genre p*.

Réciproquement, *si deux surfaces (ou variétés à deux dimensions) ont le même nombre de bords et le même genre, elles sont homéomorphes.*

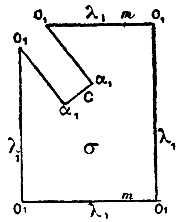
Soient, par exemple, S et T deux surfaces de genre 1 et à un seul bord.

Nous avons vu que S pouvait être transformée par sectionnement et déformation continue en un rectangle

([1]) En effet, dans le plan des Z, l'ensemble des deux arcs $\omega m o_1$, $o_1 n \omega$ (*fig.* 11), empruntés respectivement à λ_1, λ'_1, forme une ligne fermée qui tourne une fois autour de a_2 et telle, par conséquent, que les valeurs initiale et finale de $\sqrt{R(Z)}$ soient différentes, du moins si ce radical ne change pas de valeur en o_1, lorsqu'on passe d'un des arcs à l'autre.

échancré tel que celui de la figure 9 : ou encore (en écartant les deux lèvres de la section $\alpha_1 o_1$) en un polygone σ à sept côtés, comme celui de la figure 12.

Fig. 12.



Dans cette transformation, λ_1, par exemple, donne deux côtés du polygone, chaque point m de λ_1 donnant deux points situés respectivement sur ces deux côtés. Nous avons évidemment le droit de supposer que les deux points qui se correspondent ainsi divisent semblablement les côtés qu'ils décrivent. Nous ferons également la même supposition sur λ_1' et sur $a_1 o_1$.

Nous opérerons de même sur T, qui sera transformé en un heptagone analogue τ.

Il est évident qu'on peut établir entre les polygones σ et τ une correspondance biunivoque et continue dans laquelle les côtés qui se correspondent soient ceux qui jouent un rôle analogue, les points correspondants sur ces côtés étant ceux qui les divisent semblablement.

Or, en définissant une telle correspondance, on établit par là même, entre les surfaces primitives S et T, une correspondance qui est, elle aussi, parfaitement biunivoque et continue (grâce au fait que deux points du contour de σ dérivés d'un même point de S correspondent à deux points du contour de τ dérivés d'un même point de T). C. Q. F. D.

Nous nous sommes placés dans le cas simple de

$p = r = 1$. Mais il suffit, pour refaire cette démonstration dans le cas général, que, sur S et T, les coupures analogues soient elles-mêmes disposées dans le même ordre ([1]) ; et l'on peut toujours faire qu'il en soit ainsi.

La correspondance entre S et T peut même, en général, être établie de plusieurs manières distinctes ; car on peut, sur l'une des surfaces, intervertir les rôles de deux bords, ou de deux rétrosections, ou ceux des deux lignes λ_i, λ'_i qui composent une même rétrosection ([2]) (sans parler de l'arbitraire que comporte, comme on s'en assure aisément, le choix des rétrosections, dès que p dépasse l'unité).

34. On voit, par exemple, que la surface de Riemann précédemment considérée est homéomorphe à la surface du disque à p trous (n° 30), p étant calculé comme il est dit au n° 32 ([3]) et le disque étant ponctué en un ou deux endroits, suivant la parité de n.

([1]) On s'arrangera, par exemple, pour qu'en suivant, dans le sens direct le bord C de S dont il a été question au n° 25, on rencontre successivement toutes les sections transverses qui vont aux autres bords, puis toutes celles qui vont aux rétrosections, la même chose ayant lieu sur T.

([2]) Pour citer un exemple, deux tores sont homéomorphes l'un à l'autre, soit en considérant les parallèles de l'un comme correspondant aux parallèles de l'autre et les méridiens aux méridiens, soit en considérant les méridiens de l'un comme correspondant aux parallèles de l'autre, et *vice versa*.

On obtient une correspondance de ce second type en prenant l'inverse du tore par rapport à un point quelconque d'un cercle convenablement choisi (celui qui coupe à angle droit toutes les sphères qui ont les circonférences méridiennes comme grands cercles).

([3]) On trouvera dans les Traités d'Analyse (*voir*, par exemple, Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 419) le détail d'une déformation continue permettant de passer de l'une de ces surfaces à l'autre.

35. Cette même surface nous fournit un exemple simple de l'utilité des méthodes précédentes.

z et Z étant liés par la relation

$$z = \sqrt{R(Z)},$$

on est conduit, en Géométrie analytique, à rechercher s'il peut exister une variable t en fonction de laquelle z et Z puissent s'exprimer rationnellement, avec cette condition qu'à une valeur donnée de Z et à une valeur donnée de z [satisfaisant à l'équation (2)] corresponde en général une valeur de t et une seule.

C'est ce qui a lieu si R(Z) est du premier ou du second degré, l'équation (2) représentant alors une conique.

Mais il est évident maintenant que la variable t ne peut plus exister si $p > 0$, c'est-à-dire si $n \geqq 3$. En effet, si elle existait, la surface de Riemann S correspondant à l'équation (2) devrait être représentée sur le plan des t par une certaine portion de ce plan ([1]). Or c'est ce qui est visiblement impossible, puisque toute portion de plan a pour genre zéro, au lieu que le genre de S est différent de zéro.

Cette question se trouve, comme on sait, résolue, quoique par des considérations notablement plus compliquées, dans les cours de Géométrie analytique. Mais il n'en est pas de même pour celle de savoir si entre

---

([1]) Cette portion de plan pourrait, il est vrai, s'étendre à l'infini si la valeur $t = \infty$ correspondait à une valeur finie $Z = \alpha$ de Z. Mais (outre qu'on peut ici éviter qu'il en soit ainsi par une transformation homographique effectuée sur t) on ramènera le domaine de variation de t à être situé à distance finie, en retranchant de la surface S la partie qui est projetée suivant un petit cercle de centre α : cette opération ne change pas le genre de S.

L'objection précédente ne se présente pas lorsqu'on considère des surfaces de Riemann *fermées* [*voir* p. 204, note ([1])].

l'équation (2) et une équation analogue

$$z_1 = \sqrt{R_1(Z_1)} \tag{2'}$$

peut exister une correspondance *birationnelle,* c'est-à-dire si à chaque système de valeurs de z, Z vérifiant la relation (2) on peut faire correspondre un système de valeurs de z_1, Z_1 vérifiant (2′), de manière que z_1, Z_1 soient des fonctions rationnelles de z, Z, et z, Z des fonctions rationnelles de z_1, Z_1.

Or, dans cette question comme dans la précédente, nous aurons aisément une condition nécessaire pour l'existence de la correspondance cherchée, celle que les surfaces de Riemann définies par les deux équations données aient même genre [1].

Elle entraîne celle que les degrés des polynomes R et R_1, s'ils ne sont pas égaux, diffèrent au plus d'une unité, le plus grand étant alors pair.

36. Que devient enfin le théorème d'Euler pour les surfaces fermées de genre quelconque p?

Ponctuons une telle surface en lui enlevant une de ses faces. Étant alors munie d'un bord unique, elle aura l'ordre de connexion $2p+1$, d'où $F + P - A = 1 - 2p$. En rétablissant la face enlevée tout d'abord, on a

$$F + P - A = 2 - 2p.$$

37. **Classification des lignes tracées sur une surface.** — Si, sur un élément de surface, on donne deux

---

(1) Il faudrait, sous la forme que nous avons donnée à la définition de ces surfaces, les limiter (pour les rendre homéomorphes) de telle manière que les contours limites se correspondent. Nous n'insisterons pas sur la réalisation de cette condition, qui s'étudiera comme dans le cas précédent et qui ne se pose pas quand on considère les surfaces comme fermées.

points A, B, et qu'on joigne ces deux points par une ligne déterminée, toute autre ligne joignant les mêmes points et intérieure à l'élément pourra se ramener à la première par une déformation continue dans laquelle les points A, B resteront fixes.

Il n'en est évidemment pas de même sur un tore ou sur une couronne circulaire.

Proposons-nous de trouver toutes les manières distinctes dont on peut joindre deux points donnés A, B sur une surface donnée S.

A cet effet, commençons par imaginer qu'on rende celle-ci simplement connexe, et cela en employant la méthode même que nous avons décrite aux n^{os} 25-28 et en supposant que toutes les lignes de jonction telles que aa_i ou $\alpha_i A_i$ partent du même bord C. Soit S′ la surface ainsi sectionnée.

S′ étant d'un seul tenant, on peut joindre A à B, d'une infinité de manières, par un chemin intérieur à S′, c'est-à-dire par un chemin intérieur à S et ne traversant pas nos coupures. Tous les chemins qu'on peut tracer dans ces conditions sont réductibles l'un à l'autre, puisque S′ est simplement connexe : ils forment, à notre point de vue, un seul et même type, que nous appellerons le type *canonique*.

Un chemin qui longe d'un bout à l'autre le bord C_1, par exemple, coupera nécessairement, au contraire, une de nos lignes de section (la ligne aa_1 par laquelle nous avons joint C_1 à C). Nous désignerons par le symbole C_1 ou C_1^{-1} (suivant le sens du parcours) un tel chemin ou, plus généralement, celui qu'on obtient en allant d'un point donné quelconque A (sans traverser les coupures) à un point μ de C_1, décrivant C_1 de manière à revenir en μ puis allant de là en un point donné B (ce dernier parcours étant encore effectué de manière canonique, c'est-à-dire à l'intérieur de S').

Mais, après avoir décrit C_1 par exemple, on peut, au lieu d'aller en B par voie canonique, commencer par aller décrire un autre des contours fermés précédemment énumérés [1], λ_1 par exemple, pour n'aboutir en B qu'ensuite. Le chemin total ainsi obtenu sera désigné par $C_1 \lambda_1$ (ou $C_1 \lambda_1^{-1}$, suivant le sens dans lequel λ_1 sera parcouru); et ainsi de suite.

Il est aisé de voir qu'inversement tout chemin tracé sur S pourra être ramené à une combinaison des contours *fondamentaux*

$$C_i \quad (i = 1, 2, \ldots r-1), \qquad \lambda_j, \lambda'_j \quad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

reliés entre eux par des chemins tracés dans S'.

En effet, on pourra, toutes les fois que le chemin en question traversera une de nos sections, le déformer de manière que cette traversée ait lieu suivant un arc $\mu\mu'$ d'un des contours fondamentaux, — C_1 par exemple, si la section traversée est aa_1 [2]. Puis on pourra (toujours par continuité) agrandir cet arc de manière à lui faire comprendre C_1 tout entier, le point μ' coïncidant avec μ.

En opérant ainsi toutes les fois qu'on traversera une coupure, on ramènera bien notre chemin, quel qu'il

---

[1] Ce second contour pourra être C_1 lui-même, auquel cas le symbole représentatif sera C_1^2, à moins que ces deux descriptions consécutives de C_1 n'aient lieu en sens contraire, auquel cas elles se détruiraient, cette partie du chemin pouvant être rendue canonique par déformation continue.

[2] Si la section traversée est λ_i, le contour correspondant est λ'_i et inversement. Quant à une ligne telle que $\alpha_i A_i$, le contour correspondant est la rétrosection complète (representable évidemment par un symbole tel que $\lambda_i \lambda'_i \lambda_i^{-1} \lambda_i'^{-1}$), puisque celle-ci peut être considérée comme un bord de S', joint à C par la ligne $\alpha_i A_i$.

soit, à une série de descriptions des contours fondamentaux, et l'on pourra le représenter par un symbole composé des lettres C_i, λ_j, λ'_j pouvant figurer chacune plusieurs fois et affectées ou non d'exposants.

C'est ce que le lecteur vérifiera sans difficulté sur quelques aires simples. Sur la surface latérale d'un cylindre, par exemple, toute ligne fermée [1] sera caractérisée par le nombre de tours qu'elle effectuera autour de la surface, et qu'on pourra toujours supposer décrits le long d'un parallèle. Par conséquent, un fil étant enroulé d'une manière quelconque sur un anneau brisé, c'est-à-dire (*voir* n° 29) sur un tore fendu suivant un méridien λ_1 (*fig.* 8), on pourra faire glisser les spires qu'il décrira de manière à les appliquer toutes sur λ_1. Sur un tore complet, la même opération sera encore possible, à cette réserve qu'elle pourra évidemment occasionner, entre deux spires consécutives, la présence de portions faisant une ou plusieurs fois le tour de la surface suivant un parallèle (contour λ'_1). Si le tore est ponctué suivant C (*fig.* 8), la déformation du fil pourra être arrêtée par la présence de C; mais cela reviendra à dire qu'il s'enroulera une ou plusieurs fois autour de C; etc.

Si l'on écrit une telle liste de symboles de cette espèce choisis et rangés d'une manière déterminée, on aura, par là même, défini un type bien déterminé de chemins : tous les chemins correspondant à la même liste de symboles sont équivalents entre eux au point de vue qui nous occupe. Ils sont réductibles à la série des contours que ces symboles représentent, reliés entre

---

(1) On ne diminue pas la généralité en se bornant aux lignes fermées, puisqu'on peut transformer tout chemin allant de A à B en un chemin canonique, suivi d'un chemin fermé allant de B à B.

eux (et aux points A et B) par des chemins ne rencontrant pas nos lignes de section ([1]).

38. Application aux intégrales définies. — Considérons, sur la surface S, une intégrale curviligne ([2]).

Cette intégrale, qui est relative à un arc de ligne tracé entre deux points A, B, peut, comme on sait, être de forme telle qu'elle ne change pas de valeur lorsqu'on déforme d'une manière continue la ligne d'intégration en en laissant les extrémités fixes. C'est ce qui a lieu si, la position d'un point sur la surface (ou du moins sur une portion suffisamment petite quelconque de cette surface) étant définie par deux quantités x, y, l'intégrale en question est de la forme $P\,dx + Q\,dy$, où P et Q sont deux fonctions de x, y vérifiant la relation

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Sur une surface simplement connexe, une telle relation entraîne nécessairement (lorsqu'on suppose P, Q finis et continus) que l'intégrale a la même valeur pour *tous* les chemins joignant entre deux points donnés.

Mais elle n'est plus suffisante pour deux chemins qu'on ne peut pas réduire l'un à l'autre par déformation continue; or il existe de tels chemins dès que la surface est à connexion multiple.

Par contre, la conclusion reste valable pour les chemins que nous avons appelés *canoniques*, puisque tous ces chemins sont réductibles les uns aux autres.

---

(1) Nous n'étudions pas la question de savoir si deux symboles différents peuvent représenter le même type de chemins. Les simplifications possibles d'un symbole se réduisent d'ailleurs, en général, à celle qui a été notée page 231, note (1).

(2) *Voir*, par exemple, GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 357.

Mais, d'autre part, nous venons de voir que tous les autres chemins pouvaient se déduire des chemins canoniques par l'addition de parcours C_i, C_i^{-1}, ...

Soient alors I_{C_i}, I_{λ_i}, I'_{λ_i} les valeurs que prend l'intégrale donnée lorsqu'on décrit respectivement les contours fermés C_i, λ_i, λ'_i (l'intégrale suivant C_i^{-1} étant évidemment égale à $-I_{C_i}$).

On devra ajouter ou retrancher, à l'intégrale, l'une de ces quantités I_{C_i}, ... chaque fois que sera décrit, dans un sens ou dans l'autre, le contour correspondant.

L'intégrale prise le long de AB sera donc égale à l'intégrale prise le long d'un chemin canonique, augmentée d'une combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs ou négatifs [1], des $2p + r - 1 = N - 1$ quantités I_{C_i}, I_{λ_i}, I'_{λ_i}.

C'est, en particulier, cette évaluation qui s'applique aux *intégrales elliptiques et hyperelliptiques*, c'est-à-dire aux intégrales de la forme

$$\int \varphi(Z) \frac{dZ}{\sqrt{R(Z)}},$$

où $\varphi(Z)$ est une fraction rationnelle.

De telles intégrales peuvent être considérées comme prises sur une surface de Riemann, celle qui est définie par l'équation (2) : c'est seulement sur une telle surface que le radical $\sqrt{R(Z)}$ et, par suite, la quantité sous le signe $\int$ sont bien déterminés.

Par suite, l'intégrale peut admettre (et admet, en

---

[1] Ces coefficients ne dépendent que du nombre total des fois où chaque contour est décrit (les descriptions dans un sens étant défalquées des descriptions en sens contraire). Ici, par conséquent, l'ordre des lettres du symbole représentatif est indifférent. Il peut n'en pas être de même dans d'autres applications de la théorie.

général) $2p$ *périodes* correspondant aux lignes λ_i, λ'_i de la surface de Riemann. C'est ce qui se vérifie en effet. Par exemple, les périodes de l'intégrale *elliptique,* qui correspond à

$$R(Z) = (Z - a_1)(Z - a_2)(Z - a_3)(Z - a_4),$$

d'où $p = 1$, sont bien, conformément à ce qui précède, les intégrales prises suivant des contours enveloppant, l'un les points a_1, a_2, l'autre les points a_2, a_3.

De plus, la quantité $\varphi(Z)$ devient, en général, infinie en certains points; et l'on doit considérer la surface comme *ponctuée* en ces points, puisqu'en leur voisinage le théorème de Cauchy n'est plus applicable.

Ces ponctuations donneront autant de contours C_i qui fourniront autant de nouvelles périodes (périodes *polaires*) de l'intégrale.