

## Certificats de mathématiques générales

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 9  
(1909), p. 177-186

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1909\\_4\\_9\\_\\_177\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__177_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.**

---

**Caen.**

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Trouver une courbe plane C telle que, si la tangente et la normale en un quelconque M de*  
*Ann. de Mathémat., 4<sup>e</sup> série, t. IX. (Avril 1909.)* 13

ses points rencontrent OX en T et N, le segment TN soit dirigé dans le sens de OX et ait une longueur donnée  $2a$ . (On pourrait exprimer l'ordonnée  $y$  de M en fonction de  $a$  et de l'angle  $\varphi$  formé par la tangente en M avec OX, puis en déduire  $x$ .)

2° Trajectoires orthogonales des courbes C.

3° Déterminer et construire celle des courbes C qui passe au point O et qu'on désignera par  $C_0$ .

4° Calculer l'aire totale de la surface engendrée par la révolution de  $C_0$  autour de OX.

5° On peut trouver sur  $C_0$  une infinité de couples de points M,  $M_1$ , tels que les tangentes en ces deux points soient également inclinées sur la bissectrice de XOY : lieu du milieu du vecteur  $MM_1$ .

#### SOLUTION.

$$1^\circ \quad y = a \sin 2\varphi, \quad x = a(\text{Log} \sin^2 \varphi + \cos 2\varphi + h).$$

2° MT est normale, MN tangente à la trajectoire cherchée.

$$3^\circ \quad h = 1 : \text{rebroussement pour } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$4^\circ \quad \Omega = \frac{8}{3} \pi a^2 (2\sqrt{2} - 1).$$

$$5^\circ \quad \varphi + \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \xi = a \left( \text{Log} \frac{\sin 2\varphi}{2} + 1 \right), \quad \eta = a \sin 2\varphi.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer, avec quatre décimales, la racine positive de l'équation

$$x^3 + 3x - 1 = 0 \quad (0,3222\dots).$$

2° Intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = x^2 + \cos 2x.$$

(Juin 1908.)

#### Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° On a un cube dont le côté a  $2^{\text{cm}}$ , dont le centre est à l'origine des axes de coordonnées, les arêtes étant respectivement parallèles à ces axes.

En désignant par  $r$  la distance d'un point  $M$  dont les coordonnées sont  $a, b, c$  à un élément  $dv$  du volume du cube, on suppose que cet élément exerce sur  $M$  une attraction d'intensité  $r dv$  dirigée suivant la droite qui va de  $M$  à l'élément  $dv$ . Déterminer la résultante de toutes ces attractions de masse égale à 1.

2° Un point  $M$  non pesant est soumis à une attraction dirigée suivant  $MO$  et d'intensité égale à  $2OM$  (l'unité de longueur étant le centimètre). Le point est abandonné sans vitesse initiale dans la positive  $M_0$  dont les coordonnées sont  $x_0 = 10, y_0 = 15, z_0 = 20$ . Au bout de combien de temps le mobile viendra-t-il heurter le cube? Quelles sont les coordonnées du point où aura lieu le choc?

3° On suppose qu'en heurtant le cube, le mobile est renvoyé conformément aux lois de la réflexion et sans perdre de sa vitesse. Déterminer les projections de la vitesse du mobile immédiatement après le choc.

4° Intégrer l'équation différentielle

$$(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + xy = 2x^2 - x - 1 - \frac{6}{x^2}.$$

Déterminer, en particulier, les courbes intégrales qui passent respectivement par les points : 1°  $x = \frac{1}{2}, y = 1$ ; 2°  $x = 2, y = 1$ .

Indiquer la forme générale des diverses courbes intégrales lorsque la constante d'intégration varie.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° On donne la courbe représentée en coordonnées polaires par

$$\rho = \sin 2\theta.$$

Construire cette courbe. Degré de cette courbe. Aire d'une de ses boucles.

2° L'axe polaire étant  $Ox$ , calculer l'intégrale curviligne

$$\int (2x - y + 1) dx + (4y - 3x + x^2) dy,$$

prise le long de l'arc de la courbe précédente obtenu en faisant varier  $\theta$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

## 3° Discuter l'équation

$$L \cos x = x - 3.$$

Calculer la racine positive à  $\frac{1}{100}$  près.

(Juillet 1908.)

## Lille.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET ANALYSE. — I. *Étant donnée une ellipse dont les axes ont pour longueurs  $2a$  et  $2b$  ( $n \geq b$ ), trouver une courbe ( $\Gamma$ ) telle que le milieu du segment intercepté sur une tangente quelconque à ( $\Gamma$ ) par ( $\Gamma$ ) et par le petit axe de l'ellipse décrive l'ellipse.*

*L'une des courbes cherchées peut être représentée par les équations*

$$x = 2a \sin \varphi,$$

$$y = b \left( \cos \varphi + \sin^2 \varphi L \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \right),$$

où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées d'un point courant et  $\varphi$  un angle variable; la construire.

II. *Indiquer la forme de la courbe plane représentée dans un système de coordonnées polaires par l'équation*

$$\rho^2 = a^2 \cos \omega,$$

$\omega$  étant l'angle polaire et  $\rho$  le rayon vecteur d'un point de la courbe,  $a$  désignant une longueur donnée.

*Calculer l'aire de la portion du plan limitée par cette courbe.*

*Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par la sphère de rayon  $a$  dont le centre est au pôle et par un cylindre droit qui a pour base la courbe donnée.*

MÉCANIQUE. — I. *Étude cinématique du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.*

II. *Un point matériel M de poids  $p$  est lancé avec une vitesse initiale  $V_0$  sur un plan horizontal et décrit ainsi une droite D de ce plan. On demande de déterminer le*

temps que ce point mettra à s'arrêter, sachant qu'il est soumis, à cause du frottement et de la résistance de l'air, à une force retardatrice

$$(1) \quad F = a + bV^2.$$

Pour les calculs numériques, on supposera que la force  $F$  est donnée en grammes par la formule (1), quand la vitesse  $V$  est évaluée en mètres par seconde, et l'on prendra

$$V_0 = 10^m \text{ à la seconde,} \\ p = 5^e, \quad a = 0,1, \quad b = 0,005.$$

(Juillet 1908.)

### Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Exposer la méthode qui permet d'intégrer l'équation différentielle linéaire

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 y \\ = P(x) + A e^{\alpha x} + B e^{\beta x} + \dots + L e^{\lambda x},$$

où  $P(x)$  est un polynôme en  $x$ , et les quantités  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, A, B, \dots, L, \alpha, \beta, \dots, \lambda$  des constantes.

II. Étudier le mouvement d'un point qui est assujéti à rester sur une sphère de rayon  $l$  et n'est soumis à aucune force extérieure. (On prendra le centre de la sphère comme origine des axes et l'on cherchera à déterminer le temps  $t$  en fonction de la coordonnée  $z$ .)

III. Même problème que ci-dessus dans l'hypothèse où le point mobile sur la sphère est un point de masse 1 soumis à l'action de la pesanteur. Démontrer que le temps  $t$  sera alors donné en fonction de  $z$  par l'égalité

$$t = \int_{z_0}^z \frac{l dz}{\pm \sqrt{(2gz + h)(l^2 - z^2) - c^2}},$$

$g$  étant l'accélération de la pesanteur,  $h$  et  $c$  des constantes.

Développer la fonction  $t$  de  $z$  par rapport aux puissances entières croissantes de  $z$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Podaire de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

par rapport à son centre. Quadrature de cette podaire. Cas de  $b = a$ .

(Juillet 1908.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. Intégrer l'équation différentielle  $yy'' + y'^2 + 4 = 0$ , dans laquelle  $y$  désigne une fonction inconnue de la variable  $x$ , ayant pour dérivée première  $y'$  et pour dérivée seconde  $y''$ . En considérant  $x$  et  $y$  comme les coordonnées rectangulaires d'un point, quelles sont les courbes représentatives de l'intégrale générale?

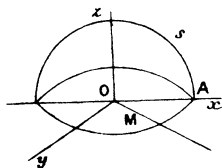
II. Intégrer les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{dy}{dx} = z + 3y, \quad \frac{dz}{dx} = z - ay + e^{4x},$$

dans lesquelles  $a$  désigne une constante,  $y$  et  $z$  des fonctions inconnues de  $x$ .

On discutera la nature des intégrales suivant les diverses valeurs attribuées à la constante  $a$ . On examinera en particulier le cas où  $a$  possède l'une des valeurs  $a = -3$ ,  $a = 1$ ,  $a = 2$ .

III. Soient trois axes rectangulaires  $Oxyz$  et une demi-



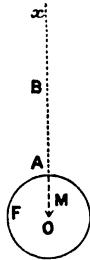
sphère  $S$  de centre  $O$ , de rayon  $a$ , située au-dessus du

plan  $xOy$  et rencontrant l'axe  $Ox$  au point  $A$ . Dans le plan  $xOy$  on considère la courbe ayant pour équations en coordonnées polaires  $OM = r$ ,  $\widehat{xOM} = \theta$ ,  $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ . Tracer cette courbe et calculer l'aire de la portion de surface sphérique  $S$  qui se projette à l'intérieur de la courbe.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer les intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

II. La Terre étant regardée comme une sphère homogène fixe de rayon  $R$ , on suppose qu'un puits rectiligne soit creusé depuis un point  $A$  de la surface jusqu'au



centre  $O$ . A l'instant  $t = 0$ , on lance du point  $A$  vers le point  $O$  un point pesant de masse  $m$  avec une vitesse initiale dont la valeur absolue est  $V_0$ . Étudier le mouvement du point, sachant que l'attraction de la Terre, sur un point  $M$  placé à l'intérieur, est une force  $F$  dirigée vers le centre  $O$  et proportionnelle à la distance  $OM$ ; à la surface, en  $A$ , cette force se réduit au poids  $mg$  (on néglige la résistance de l'air). Calculer le temps  $T$  que met le mobile à arriver au centre  $O$ , et la vitesse  $V$  avec laquelle il y arrive; on fera les calculs numériques dans les deux hypothèses suivantes : 1° on supposera d'abord  $V_0 = 0$ ; 2° on supposera ensuite que  $V_0$  est la vitesse acquise au point  $A$  par le point pesant abandonné sans vitesse au point  $B$ , de la verticale  $OA$ , situé à une distance  $OB = 2R$  du centre; on admettra que l'attraction de la Terre sur



( 184 )

*un point extérieur varie en raison inverse du carré de la distance du point au centre O.*

NOTA. — *On sait qu'en prenant pour unité de temps la seconde et pour unité de longueur le mètre, on a*

$$g = 9,8, \quad 2\pi R = 40000000.$$

(Juillet 1907.)

### Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la droite variable définie par l'équation*

$$(1) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = \lambda,$$

*où  $\alpha$  désigne un paramètre variable et  $\lambda$  une fonction de  $\alpha$ . Soient M le point où elle touche son enveloppe, P le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la droite.*

1° *Calculer les coordonnées des points M, P et les expressions des distances OM, OP, MP.*

2° *Montrer que, si la distance MP est constante,  $\lambda$  est une fonction linéaire de  $\alpha$ ,*

$$\lambda = a\alpha + c$$

*(a et c étant des constantes).*

3° *Étudier l'enveloppe des droites satisfaisant à cette condition. (Forme de la courbe, expressions de l'élément d'arc et du rayon de courbure, coordonnées du centre de courbure, développée.)*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^{2a} x^3 \sqrt{2ax - x^2} dx.$$

(Juin 1908.)

### PREMIER EXAMEN DU DIPLOME D'INGÉNIEUR ÉLECTRICIEN.

### Lille.

MATHÉMATIQUES. — I. *Construire la courbe (C) qui a pour*

équation en coordonnées polaires

$$\rho = a \sqrt{\tan^2 \frac{\omega}{2}},$$

où  $a$  désigne une longueur donnée positive.

Former l'équation de cette courbe en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

Exprimer les coordonnées  $(x, y)$  d'un point de la courbe en fonctions rationnelles d'un paramètre.

II. Soient OA l'arc de courbe situé au-dessus de OX et à droite de OY, T le point de rencontre de OX avec la tangente en A. Calculer l'aire de la portion du plan limitée par l'arc OA, la tangente AT et l'axe OX.

III. Construire le cercle de courbure au point A.

IV. Former l'équation des trajectoires orthogonales des courbes C, lorsque  $a$  varie. Construire l'une de ces courbes.

V. Calculer pour  $a = 1$  les coordonnées  $x$  et  $y$  du point le plus à droite sur la courbe C.

MÉCANIQUE. — Même composition que pour le Certificat de Mathématiques générales.

(Juillet 1908.)

TROISIÈME EXAMEN  
DU DIPLOME D'INGÉNIEUR ÉLECTRICIEN.

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Théorie des caractéristiques mécaniques. Relations dynamiques entre un moteur et les outils qu'il actionne.

II. Transmissions par bielle et manivelle.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère un régulateur de Watt, avec suspension sur l'axe, ayant les caractéristiques

*suivantes :*

Poids des boules.....	$P = 15^{\text{kg}}$
» du manchon.....	$Q = 3^{\text{kg}}$
Longueur et poids des bras... $a = 0^{\text{m}}, 65,$	$p = 3^{\text{kg}}$
» » bielles. $b = 0^{\text{m}}, 35,$	$q = 1^{\text{kg}}, 5$

*Valeurs limites de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  des bras :*

$$\alpha_0 = 21^\circ, \quad \alpha_1 = 33^\circ.$$

*Résistance opposée au manchon par les organes de réglage :  $F = 3^{\text{kg}}$ .*

*Vitesse de la machine : 45 tours par minute.*

*1<sup>o</sup> Construire le graphique qui figure la zone de stabilité du régulateur.*

*2<sup>o</sup> Calculer la sensibilité et le degré d'isochronisme.*

(Juillet 1908.)