NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. CLAPIER

# Agrégation des sciences mathématiques (1908). Composition sur le calcul différentiel et intégral

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 9 (1909), p. 167-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__167_1>

## AGREGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1908). COMPOSITION SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTEGRAL [1].

Solution par M. C. CLAPIER.

I. Lorsque le paramètre $\alpha$ varie, la famille $\Gamma$ a en général une enveloppe $\Gamma$, définie par les équations (1) et (2). Par hypothèse, l'équation (3) est aussi satisfaite pour tous les points $m(\xi, \eta)$ de cette courbe; nous aurons donc, en dérivant les deux premières,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{d\alpha}=0\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial x}\,\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial x}\,\frac{dy}{d\alpha}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{pour}\qquad x=\xi,\quad y=\eta.$$

De ces nouvelles équations il résulte que : ou bien $\frac{d\xi}{d\alpha}, \frac{d\eta}{d\alpha}$ sont nuls et par suite les courbes C passent par

---

[1] *Voir* l'énoncé page 426 du Tome précédent.

un point fixe $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$; ou bien on a la condition

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial y}.$$

Dans ce dernier cas, la courbe C a, avec son enveloppe $\Gamma$, un contact du second ordre : en effet, déterminons, par dérivations par rapport à $x$, les expressions $y'$ et $y''$ correspondant au point $m(x, y)$ de la courbe $\Gamma$; en tenant compte de ce que $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ sont nuls en ce point, nous avons les deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial y} y'\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0.$$

Si

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = \frac{d\alpha}{dx} + y' \frac{d\alpha}{dy}$$

n'est pas nul, la condition (4) exprime que les valeurs de $y'$ et $y''$ sont les mêmes soit qu'on suppose $\alpha$ variable, soit qu'on suppose $\alpha$ constant, et, comme dans ce dernier cas on se déplace sur la courbe C, on voit que l'enveloppée et l'enveloppe ont au point $m$ un contact du second ordre.

II. Appliquons ce résultat au cas particulier où les courbes C sont homothétiques à une courbe fixe $C_0$ représentée par l'équation

$$Y = \varphi(X).$$

Le point de contact $m(x, y)$ de l'enveloppe $\Gamma$ est l'homologue du point M(X, Y) de $C_0$, et l'on a

$$(5)\qquad \begin{cases} X = x_0 + \varkappa(x - x_0) \\ Y = y_0 + \varkappa(y - y_0) \end{cases} \qquad \frac{SM}{Sm} = \varkappa.$$

Les coordonnées $x_0$ et $y_0$ du centre S et le rapport d'homothétie $\varkappa$ sont fonctions du paramètre $\alpha$; avec ces notations l'équation générale des courbes C pourra s'écrire

$$f = \varphi(X) - Y = 0.$$

Les équations (2) et (4) deviendront

$$\varphi'(X)\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \qquad \text{et} \qquad \varphi''(X)\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0.$$

Si donc on suppose que la courbe $C_0$ n'est pas une droite, nous aurons les équations très simples

$$(6)\qquad \frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0.$$

Elles expriment qu'on a

$$\frac{dX}{d\alpha} = \varkappa\frac{dx}{d\alpha}, \qquad \frac{dY}{d\alpha} = \varkappa\frac{dy}{d\alpha},$$

c'est-à-dire que les éléments d'arc, aux points M et $m$, des courbes $C_0$ et $\Gamma$, sont homologues, résultat géométrique évident.

Quant à l'équation (4), elle prendra la forme

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha^2} = \varphi'(X)\frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2}.$$

Pour avoir son interprétation géométrique, calculons le rayon de courbure de la courbe $C_0$,

$$R = \frac{(dX^2 + dY^2)^{\frac{3}{2}}}{dX\, d^2Y - dY\, d^2X};$$

nous avons, en dérivant deux fois les expressions (5),

$$\frac{d^2X}{d\alpha^2} = \varkappa\frac{d^2x}{d\alpha^2} + \frac{dx}{d\alpha}\frac{d\varkappa}{d\alpha} + \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha^2},$$
$$\frac{d^2Y}{d\alpha^2} = \varkappa\frac{d^2y}{d\alpha^2} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{d\varkappa}{d\alpha} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\alpha^2};$$

d'où, en remarquant que

$$\varphi'(X) = \frac{dY}{dX},$$

et tenant compte en outre de l'équation (7),

$$dY\,d^2X - dX\,d^2Y = \varkappa^2(dy\,d^2x - dx\,d^2y),$$
$$dX^2 + dY^2 = \varkappa^2(dx^2 + dy^2).$$

Donc

$$R = \varkappa r,$$

$r$ étant le rayon de courbure au point $m$ de $\Gamma$, et les centres de courbure aux points correspondants de $C_0$ et $\Gamma$ sont deux points homologues, résultat géométrique facile à prévoir.

Si la courbe $C_0$ est un cercle de rayon R, son homothétique est un cercle de rayon $r$, qui est osculateur à l'enveloppe $\Gamma$. La famille F est constituée par l'ensemble des cercles osculateurs à une courbe fixe.

On pouvait donc, sans se servir de la théorie générale (I), trouver les équations (6) et (7) en exprimant que le cercle de courbure de la courbe $C_0$ a pour homologue le cercle de courbure de l'enveloppe $\Gamma$; comme un cercle est déterminé par trois points, il est bien clair que l'enveloppée C a même cercle de courbure que son enveloppe $\Gamma$.

Les équations (6) nous donnent, en développant,

$$(8) \qquad \frac{x - x_0}{\frac{dx_0}{d\alpha}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy_0}{d\alpha}} = \frac{\varkappa - 1}{\frac{d\varkappa}{d\alpha}}.$$

Pour avoir les conditions demandées, il suffit de porter ces valeurs de $x$ et $y$ dans (5) et (7); on a

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= x_0 + \varkappa(\varkappa-1)\frac{dx_0}{d\varkappa} \\ Y &= y_0 + \varkappa(\varkappa-1)\frac{dy_0}{d\varkappa} \end{aligned}\right\} \qquad Y = \varphi(X),$$

$$\frac{(\varkappa-1)\left(\dfrac{dy_0}{d\varkappa}\dfrac{d^2\varkappa}{d\alpha^2} - \dfrac{d^2y_0}{d\alpha^2}\right) - 2\dfrac{dy_0}{d\alpha}\dfrac{d\varkappa}{d\alpha}}{(\varkappa-1)\left(\dfrac{dx_0}{d\varkappa}\dfrac{d^2\varkappa}{d\alpha^2} - \dfrac{d^2x_0}{d\alpha^2}\right) - 2\dfrac{dx_0}{d\alpha}\dfrac{d\varkappa}{d\alpha}} = \varphi'(X).$$

Supposons qu'on donne la courbe $C_0$, de manière que ses coordonnées puissent s'exprimer, à l'aide du paramètre $\alpha$, par les équations (9).

1° Si l'on connaît les expressions des coordonnées de S, on connaîtra

$$\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{\dfrac{d\varkappa}{d\alpha}} = \frac{1}{F(\alpha)};$$

d'où, en intégrant,

$$\varkappa = \frac{1}{1 - e^{u(\alpha)}}.$$

2° Si l'on se donne les coordonnées $x_1$ et $y_1$ du point O′, défini par l'égalité

$$\frac{SO}{SO'} = \varkappa,$$

nous aurons

$$x_1 = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}x_0, \qquad dx_1 = \frac{d\varkappa}{\varkappa^2}x_0 + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}dx_0$$

et

$$X = \varkappa(\varkappa-1)\frac{dx_0}{d\varkappa} + x_0 = \varkappa^2\frac{dx_1}{d\varkappa};$$

donc la détermination de $\varkappa$ revient à effectuer la quadrature

$$\frac{d\varkappa}{\varkappa^2} = F(\alpha)\,d\alpha.$$

III. Les équations (8) nous donnent les coordonnées $x$ et $y$ des points de l'enveloppe, en fonction du paramètre $\alpha$ :

$$x = x_0 + (\varkappa - 1)\frac{dx_0}{d\varkappa},$$

$$y = y_0 + (\varkappa - 1)\frac{dy_0}{d\varkappa}.$$

Si l'on suppose

$$\frac{d\varkappa}{d\alpha} \neq 0,$$

$x$ et $y$ sont des fonctions régulières de $\alpha$, représentées par des séries entières.

Or, par hypothèse, $\varkappa$ passe par un maximum ou un minimum dans l'intervalle $(\alpha_1, \alpha_2)$; donc pour cette valeur $\alpha$ de l'intervalle $\frac{d\varkappa}{d\alpha}$ est nul et deux cas peuvent se présenter :

Ou bien $\frac{dx_0}{d\alpha}$ et $\frac{dy_0}{d\alpha}$ ne sont pas nuls simultanément et le point correspondant de l'enveloppe s'éloigne indéfiniment ;

Ou bien le point S est un point de rebroussement sur la courbe qu'il décrit, et il en est de même du point $O_1$, de coordonnées

$$x_1 = (1 - \varkappa)x_0, \qquad y_1 = (1 - \varkappa)y_0,$$

sur la courbe qu'il décrit.

Plus généralement, si l'on pose

$$x_1 = x_0 + \varkappa(a - x_0),$$
$$y_1 = y_0 + \varkappa(b - x_0),$$

$a$ et $b$ étant les coordonnées d'un point fixe $\omega$ du plan, on aura

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{dy_1}{d\alpha} = 0$$

et ce point $O_1(x_1 y_1)$ est aussi un point de rebroussement.

Remarquons que, dans le premier cas, la tangente au point S, à la courbe lieu des centres d'homothétie, est une direction asymptotique de la courbe $C_0$.

Dans le second cas, les rapports $\frac{dx_0}{d\varkappa}$ et $\frac{dy_0}{d\varkappa}$ ont pour limites

$$\frac{d^2 x_0}{d\alpha^2} : \frac{d^2 \varkappa}{d\alpha^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 y_0}{d\alpha^2} : \frac{d^2 \varkappa}{d\alpha^2}.$$

IV. Si nous prenons une famille F de surface $\Sigma$, satisfaisant aux équations

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$$

pour tous les points $m$ de leur enveloppe $\Gamma$, nous verrons comme dans le cas des courbes que : ou bien $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dy}{d\alpha}$ sont nuls en tous les points de $\Gamma$, c'est-à-dire que $x$ et $y$ ne dépendent que d'un paramètre $z$ et les surfaces passent par une ligne fixe; ou bien on a les conditions

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial z}$$

qui expriment que les trois sections de l'enveloppe parallèles aux plans coordonnés, menées par le point $m(x, y)$, ont un contact du second ordre avec les trois sections planes de l'enveloppée correspondante; donc, en chaque point de la ligne de contact de $\Sigma$ et de $\Gamma$, nous avons mêmes éléments différentiels du second ordre pour les deux surfaces.

Appliquons au cas où les surfaces $\Sigma$ sont homothétiques à une surface fixe $\Sigma_0$ ; nous aurons comme dans le cas des courbes

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X\, \partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X\, \partial Y} \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned} \right.$$

en supposant que $z = \varphi(XY)$ soit l'équation de $\Sigma_0$. On en déduit que, si cette surface ne se réduit pas à une courbe, elle doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial X\, \partial Y}.$$

On voit que $\Sigma_0$ doit être une surface développable, et il en est nécessairement de même de l'enveloppe $\Gamma$, dont les plans tangents sont les homologues des plans tangents de $\Sigma_0$.

Si celle-ci est une courbe gauche, nous aurons des équations analogues aux relations (8) et les mêmes déterminations de $x$ pour les deux questions analogues de la deuxième partie. On aura les mêmes résultats si l'on remplace la surface développable $\Sigma_0$ par son arête de rebroussement; il est clair que l'arête de rebroussement de l'enveloppe est l'enveloppe des arêtes de rebroussement des surfaces $\Sigma$.

V. Si l'on imagine que la courbe matérielle $C_0$ se déplace dans son plan suivant une certaine loi, elle enveloppe une courbe $\Gamma$; ce mouvement pourra être obtenu par le roulement d'une courbe $C'$ sur une autre courbe fixe $\Gamma'$.

Soit M le point de contact des deux premières; la normale à l'enveloppe en ce point va passer par le centre instantané I, et l'on obtiendra le centre de courbure $\Gamma$ par la construction d'Euler-Savary.

Il résulte de cette construction que, pour que ce centre coïncide avec le centre de courbure de C, il faut en général qu'il soit confondu avec le point I. Donc, pour que C ait un contact du second ordre avec son enveloppe, il faudra que la roulette C′ soit la développée de la courbe donnée $C_0$ ; la courbe $\Gamma'$ étant quelconque sera à son tour la développée de l'enveloppe $\Gamma$.