MAURICE FRÉCHET

Une définition fonctionnelle des polynomes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 145-162

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__145_0>

[H11c]

UNE DÉFINITION FONCTIONNELLE DES POLYNOMES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Cauchy a montré par une méthode bien connue (¹) que la fonction réelle $f(x)$ la plus générale vérifiant l'identité

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y),$$

quelles que soient les variables réelles x, y, est de la forme $f(x) \equiv \mathrm{A}x$, A désignant une constante réelle pourvu qu'on suppose $f(x)$ continue.

On en déduit immédiatement la définition du polynome le plus général du premier degré (à coefficients et à variables réels) comme la solution la plus générale parmi les fonctions continues réelles $f(x)$ vérifiant l'identité

$$f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) \equiv 0.$$

Je me propose de montrer ici qu'on peut généraliser cette définition et l'étendre aux polynomes à un nombre fini (et même infini) de variables.

Dans tout ce qui suit je supposerai implicitement que tous les nombres (coefficients ou variables) intervenant dans mes raisonnements sont réels.

(¹) *Voir* par exemple NIEWENGLOWSKI, *Cours d'Algèbre de Math. spéciales*, t. I, p. 385.

POLYNOMES A UNE VARIABLE.

THÉORÈME. — *Un polynome de degré n en x est une fonction continue vérifiant l'identité*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(x_1+x_2+\ldots+x_{n+1})-\sum_n f(x_{i_1}+\ldots+x_{i_n}) \\ & \qquad +\sum_{n-1} f(x_{i_1}+\ldots+x_{i_{n-1}})-\ldots \\ & \qquad +(-1)^n\sum_n f(x_{i_1})+(-1)^{n+1}f(0)\equiv 0, \end{aligned} \right.$$

quelles que soient les constantes $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sans vérifier les identités analogues obtenues en remplaçant l'entier n par un entier inférieur.

Dans l'identité (1), le symbole $\sum\limits_k$ indique qu'on doit faire la somme de tous les termes obtenus en remplaçant, dans le terme qui suit ce symbole, les nombres $i_1, \ldots, i_k$ par une quelconque des combinaisons k à k des entiers $1, 2, \ldots, n+1$.

Le théorème que nous venons d'énoncer constitue évidemment une définition fonctionnelle des polynomes. Ce théorème, évident quand $n=0$, résulte pour $n=1$ de la proposition de Cauchy rappelée plus haut. Pour le démontrer dans le cas le plus général, il suffit de prouver que, s'il est vrai lorsqu'on remplace n par $0, 1, 2, \ldots, n-1$, il est vrai pour la valeur n.

Remarquons d'abord que, si x_{n+1} désigne une constante arbitraire et $f(x)$ une fonction continue vérifiant l'identité (1), la fonction continue

$$\varphi(x)\equiv f(x+x_{n+1})-f(x)-f(x_{n+1})+f(0)$$

est un polynome de degré $(n-1)$ au plus. En effet, on voit facilement que l'expression

$$\varphi(x_1+\ldots+x_n)-\sum_{n-1}\varphi(x_{j_1}+x_{j_2}+\ldots+x_{j_{n-1}})$$
$$+\sum_{n-2}\varphi(x_{j_1}+\ldots+x_{j_{n-2}})-\ldots+(1)^{n-1}\sum_{1}\varphi(x_{j_1})+(-1)^n\varphi(0)$$

est nulle quels que soient x_1, ..., x_n ($j_1, j_2, \ldots, j_k$ représentant une quelconque des combinaisons k à k des n nombres seulement 1, 2, ..., n) comme étant identique au premier membre de (1). Le théorème étant supposé vrai jusqu'à $n-1$, il en résulte que, quels que soient x et x_{n+1}, $\varphi(n)$ est bien de degré $n-1$ au plus en x. Alors l'expression

$$(2)\qquad f(x+y)-f(x)-f(y)+f(0)\equiv Q(x,y),$$

étant symétrique en x et y, est un polynome en x et en y qui est de degré $(n-1)$ au plus par rapport à x et par rapport à y séparément. Nous allons montrer qu'en vertu de l'identité (2) ce polynome a une forme particulière. En effet, on a d'abord, d'après (2),

$$\begin{aligned}&Q(x,y)+Q(x+y,z)\\&\quad\equiv f(x+y+z)-f(x)-f(y)-f(z)+2f(0),\end{aligned}$$

quelles que soient les variables x, y, z. Le premier membre est donc une fonction symétrique de x, y, z. En écrivant $Q(x, y)$ sous la forme

$$(3)\quad Q(x,y)\equiv Q_0+Q_1(x,y)+Q_2(x,y)+\ldots+Q_r(x,y),$$

chacun des termes désignant un polynome homogène par rapport à l'ensemble des variables x, y, on voit immédiatement que chacun d'eux $Q_p(x, y)$ satisfera à cette même condition, c'est-à-dire que la fonction

$$Q_p(x,y)+Q_p(x+y,z)$$

devra être symétrique en x, y, z. Or, Q_p est de la forme

$$Q_p(x, y) \equiv A_0 x^p + A_1 x^{p-1} y + A_2 x^{p-2} y^2 + \ldots + A_p y^p,$$

d'où

$$\begin{aligned} Q_p(x, y) &+ Q_p(x+y, z) \\ &\equiv 2A_0 x^p + (A_1 y + A_0 C_p^1 y + A_1 z) x^{p-1} + \ldots \\ &\quad + [A_h y^h + A_0 C_p^h y^h + A_1 C_{p-1}^{h-1} y^{h-1} z + A_2 C_{p-2}^{h-2} y^{h-2} z^2 + \ldots \\ &\qquad\qquad + A_{h-1} C_{p-h+1}^1 y z^{h-1} + A_h z^h] x^{p-h} + \ldots \\ &\quad + [A_p y^p + A_0 y^p + A_1 z y^{p-1} + A_2 z^2 y^{p-2} + \ldots + A_p z^p]. \end{aligned}$$

Les coefficients des différentes puissances de x devront être symétriques en x, y ; on voit qu'on aura en particulier

$$A_0 = 0, \qquad A_{h-1} = A_1 \frac{C_{p-1}^{h-1}}{C_{p-h+1}^1} \qquad (\text{pour } h = 2, \ldots, p).$$

D'ailleurs, Q_p étant symétrique en x, y, on aura

$$A_p = A_0;$$

et comme

$$\frac{C_{p-1}^{h-1}}{C_{p-h+1}^1} = \frac{C_p^{h-1}}{C_p^1},$$

on aura

$$\begin{aligned} p Q_p \equiv C_p^1 A_1 x^{p-1} y + \ldots + C_p^{h-1} A_1 x^{p-h+1} y^{h-1} + \ldots \\ + C_p^{p-1} A_1 x y^{p-1} \equiv A_1[(x+y)^p - x^p - y^p]. \end{aligned}$$

En appliquant ce résultat aux polynomes $Q_0, \ldots, Q_r$ on voit que l'on aura pour Q une expression de la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} Q(x, y) &\equiv \sum_{p=2}^{p=r} B_p[x+y)^p - x^p - y^p] \\ &\equiv R(x+y) - R(x) - R(y) + R(0), \end{aligned} \right.$$

en appelant $R(x)$ le polynome de degré r

$$R(x) \equiv B_2 x^2 + \ldots + B_r x^r,$$

avec $r \leqq n$, puisque $Q(x, y)$, qui est de degré $r-1$ en x, doit être en x de degré $n-1$ au plus.

La solution est maintenant immédiate. En posant

$$S(x) \equiv f(x) - R(x),$$

l'identité (2) devient, moyennant (4),

$$S(x+y) - S(x) - S(y) + S(0) \equiv 0.$$

$S(x)$ étant une fonction continue qui doit vérifier cette identité quels que soient x, y, on a vu que $S(x)$ est nécessairement un polynome du premier degré $(B_2 x + B_0)$.

On a donc

$$f(x) \equiv S(x) + R(x) \equiv B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_r x^r$$

avec

$$r \leqq n.$$

Il est bien démontré que $f(x)$ est nécessairement un polynome de degré x au plus.

Inversement tout polynome de degré n vérifie l'identité (1). — Il suffit de démontrer que l'identité (1) est satisfaite quand on y remplace $f(x)$ par x^r avec $r \leqq n$. Or, le premier membre devient alors

$$(x_1 + \ldots + x_{n+1})^r - \sum_n (x_{i_1} + \ldots + x_{i_n})^r + \ldots + (-1)^n \sum_1 x_{i_1}^r.$$

Chacune des puissances qui y figurent est de la forme

$$\sum \frac{r!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_r!} x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_r}^{\alpha_r} \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = r),$$

où plusieurs des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_2$ peuvent être nuls en remplaçant alors $0!$ par 1.

On voit que le coefficient est le même ; il suffit donc de montrer que les nombres de fois que ce terme se trouve précédé du signe $+$ ou du signe $-$ s'équilibrent. Or, en prenant par exemple le terme

$$\sum \frac{r!}{\beta_1!\ldots\beta_s!} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_s^{\beta_s}$$

où maintenant nous supposons tous les $\beta \neq 0$, le total dont nous venons de parler est égal à

$$\begin{aligned} 1 - C_{n+1-s}^{n-s} + C_{n+1-s}^{n-1-s} - \ldots \\ + (-1)^{n-s} C_{n+1-s}^{1} + (-1)^{n+1-s} = (1-1)^{n+1-s} = 0. \end{aligned}$$

La réciproque est ainsi démontrée.

Polynomes a plusieurs variables.

Un polynome de degré n par rapport à l'ensemble de r variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ est une fonction continue par rapport à l'ensemble de ces variables, qui vérifie l'identité

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots + x_1^{(n+1)}, x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + \ldots + x_2^{(n+1)}, \\ & \qquad \ldots, x_r^{(1)} + \ldots + x_r^{(n+1)}) \\ & - \sum_n f(x_1^{(i_1)} + x_1^{(i_2)} + \ldots + x_1^{(i_n)}, \ldots, x_r^{(i_1)} + \ldots + x_r^{(i_n)}) \\ & + \sum_{n-1} f(x_1^{(i_1)} + \ldots + x_1^{(i_{n-1})}, \ldots, x_r^{(i_1)} + \ldots + x_r^{(i_{n-1})}) - \ldots \\ & + (-1)^n \sum_1 f(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_1)}, \ldots, x_r^{(i_1)}) + (-1)^{n+1} f(0) \equiv 0 \end{aligned} \right.$$

[où les signes $\sum_k$ indiquent que l'on fait la somme de tous les termes obtenus en prenant pour $i_1, i_2, \ldots, i_k$ l'un quelconque des arrangements k à k des nombres $(1, 2, \ldots, n+1)$] *quelles que soient les valeurs des*

$r(n+1)$ *quantités* $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n+1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}$.

En effet, soit

$$f(x_1, \ldots, x_r)$$

une fonction continue satisfaisant à l'identité (5); posons

$$\varphi(x) \equiv f(x, 0, 0, \ldots, 0), \qquad \psi(x) = f(xx_1, xx_2, \ldots, xx_r).$$

En faisant dans l'identité (5)

$$x_k^{(1)} = x_k^{(2)} = \ldots = x_k^{(n+1)} = 0$$

pour $k = 2, 3, \ldots, r$, on voit qu'elle peut s'écrire

$$\varphi(x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots + x_1^{(n+1)}) - \sum_n \varphi(x_1^{(i_1)} + \ldots + x_1^{(i_{n+1})}) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \sum_1 \varphi(x_1^{(i_1)}) + (-1)^{n+1} \varphi(0) \equiv 0.$$

D'après le paragraphe précédent, $\varphi(x)$ est donc un polynome de degré n au plus.

De même, en faisant dans l'identité (5)

$$x_k^{(j)} = y_j x_k,$$

elle pourra s'écrire

$$\psi(y_1 + \ldots + y_{n+1}) - \sum_n \psi(y_{i_1} + \ldots + y_{i_n})$$
$$+ \sum_{n-1} \psi(y_{i_1} + \ldots + y_{i_{n-1}}) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \sum_1 \psi(y_{i_1}) + (-1)^{n+1} \psi(0) \equiv 0,$$

quelles que soient les constantes arbitraires $y_1, \ldots, y_{n+1}$. Donc $\psi(x)$ est un polynome de degré n au plus.

Il suffit maintenant de prouver que $f(x_1, \ldots, x_r)$ satisfaisant à (5) est un polynome pour démontrer le théorème. Car alors f est de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_r^{\alpha_r},$$

et l'on a

$$\psi(x) = \sum A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_r^{\alpha_r} x^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r}.$$

$\psi(x)$ étant au plus de degré n et comme en supposant f réduit il n'y aura *a fortiori* aucune réduction dans $\psi(x)$ si les x_i sont arbitraires, on voit que

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_r \leqq n,$$

c'est-à-dire que $f(x_1, \ldots, x_2)$ est bien de degré n au plus par rapport à l'ensemble des variables $x_1, \ldots, x_r$.

Or, le théorème est évident pour $n = 0$; dans le cas de $n = 1$, l'identité (5) devient

$$\begin{aligned} &f(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, x_2^{(1)} + x_2^{(2)}, \ldots, x_r^{(1)} + x_r^{(2)}) \\ &\quad - f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}) - f(x_2^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)}) + f(0, \ldots, 0) = 0. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} &f(x_1 + 0, 0 + x_2, \ldots, 0 + x_r) \\ &\quad - f(x_1, 0, \ldots, 0) - f(0, x_2, \ldots, x_r) + f(0, \ldots, 0) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \\ &\quad \equiv f(x_1, 0, \ldots, 0) + f(0, x_2, \ldots, x_r) - f(0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Comme ici

$$\varphi(x) \equiv f(x, 0, \ldots, 0)$$

est au plus du premier degré, on voit que $f(x_1, \ldots, x_2)$ est, par rapport à x_1, un polynome du premier degré au plus. Par analogie, il en sera de même par rapport à $x_2, \ldots, x_r$ pris séparément. C'est donc un polynome par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_2$, et, d'après la remarque faite plus haut, ce polynome sera au plus du premier degré non pas seulement par rapport à chacune des variables, mais par rapport à leur ensemble.

Ainsi le théorème est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons-le vrai jusqu'à $n - 1$ et soit $f(x_1, \ldots, x_2)$ une fonction continue satisfaisant à l'identité (5). Posons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r) \\ &\quad \equiv f(x_1 + x_1^{(n+1)}, x_2 + x_2^{(n+1)}, \ldots, x_r + x_r^{(n+1)}) \\ &\quad\quad - f(x_1, \ldots, x_r) - f(x_1^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}) + f(0, 0, \ldots, 0). \end{aligned}\right.$$

On verra de la même manière que pour les polynomes à une variable que $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ satisfait à une identité analogue à (5), mais où n est remplacé par $n - 1$.

D'après notre hypothèse, φ serait donc un polynome de degré $n - 1$ au plus par rapport à l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Ceci étant vrai, quelles que soient les quantités $x_1^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}$, l'expression

$$\begin{aligned} &P(y_1, y_2, \ldots, y_r) \\ &\quad \equiv f(y_1 + 0, 0 + y_2, \ldots, 0 + y_r) - f(y_1, 0, 0, \ldots, 0) \\ &\quad\quad - f(0, y_2, \ldots, y_r) + f(0, 0, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

sera un polynome en y_1. Cette identité peut s'écrire

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \ldots, y_r) \equiv f(y_1, 0, \ldots, 0) &+ f(0, y_2, \ldots, y_r) \\ &- f(0, 0, \ldots, 0) + P(y_1, y_2, \ldots, y_r), \end{aligned}$$

et nous avons vu que $f(y_1, 0, \ldots, 0)$ est aussi un polynome en y. Donc $f(y_1, y_2, \ldots, y_r$ est également un polynome en y et, par symétrie, sera un polynome en $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Ce polynome, d'après ce que nous avons déjà remarqué, sera d'ailleurs nécessairement de degré n au plus.

Démontrons maintenant *la réciproque*.

Je dis que tout polynome en $x_1, \ldots, x_r$ de degré au plus égal à n satisfait à l'identité (5).

Il suffit évidemment de le prouver pour un monome de la forme

$$x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_1+\ldots+\alpha_r \leqq n$$

Pour cela, désignons le premier membre de (5) par le symbole

$$\underset{x_1^{(1)},\ \ldots,x_1^{(n+1)},x_2^{(1)},\ \ldots,x_r^{(n+1)}}{\bigvee} f(x_1,\ldots,x_r)$$

qui n'est pas nul en général. On a évidemment

$$\begin{aligned}
&\underset{x_1^{(1)},\ \ldots,x_1^{(n+1)}\ \ldots,x_r^{(n+1)}}{\bigvee} c_1f_1(x_1,\ldots,x_r)+c_2f_2(x_1,\ldots,x_r)+\ldots+c_qf_q(x_1,\ldots,x_r)\\
&\equiv c_1\underset{x_1^{(1)},\ \ldots,x_r^{(n+1)}}{\bigvee} f_1(x_1,\ldots,x_r)\\
&\quad + c_2\underset{x_1^{(1)}\ \ldots,x_r^{(n+1)}}{\bigvee} f_2(x_1,\ldots,x_r)+\ldots+c_q\underset{x_1^{(1)},\ \ldots,x_r^{(n+1)}}{\bigvee} f_q(x_1,\ldots,x_r),
\end{aligned}$$

quelles que soient les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ et les constantes $c_1, \ldots, c_q$. On aura donc

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\underset{x_1^{(1)},\ \ldots x_r^{n+1}}{\bigvee} (\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_rx_r)^p\\
&\equiv\sum\frac{p!}{\alpha_1!\ldots\alpha_r!}\lambda_1^{\alpha_1}\ldots\lambda_r^{\alpha_r}\underset{x_1^{(1)},\ \ldots,x_r^{n+1}}{\bigvee} x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r}\\
&\qquad (\text{avec } \alpha_1+\ldots+\alpha_r=p),
\end{aligned}\right.$$

quelles que soient les constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Or, le premier membre développé

$$\begin{aligned}
&[\lambda_1(x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+\ldots+x_1^{(n+1)})+\ldots+\lambda_r(x_r^{(1)}+\ldots+x_r^{(n+1)})]^p\\
&\quad-\sum_n[\lambda_1(x_1^{(i_1)}+\ldots+x_1^{(i_n)})+\ldots+\lambda_r(x_r^{(i_1)}+\ldots+x_r^{(i_n)})]^p+\ldots\\
&\quad+(-1)^n\sum_1(\lambda_1x_1^{(i_1)}+\ldots+\lambda_rx_r^{(i_1)})^p
\end{aligned}$$

peut s'écrire plus simplement, en posant

$$t = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r, \qquad t_i = \lambda_1 x_1^{(i)} + \ldots + \lambda_r x_r^{(i)}$$
$$(i = 1, \ldots, n+1)$$

sous la forme

$$(t_1 + \ldots + t_{n+1})^p - \sum (t_{i_1} + \ldots + t_{i_n})^p$$
$$+ \sum (t_{i_1} + \ldots + t_{i_{n-1}})^p + \ldots + (-1)^n \sum t_{i_1}^p,$$

c'est-à-dire

$$\underset{t_1, \ldots, t_{n+1}}{\mathrm{V}} t^p.$$

Or, d'après le paragraphe précédent concernant le cas d'une variable, cette quantité est nulle pour $p \leqq n$, puisque t^p sera alors un polynome en t degré $\leqq n$. En définitive, le premier membre de (7) est nul pour $p \leqq n$ quelles que soient les constantes $\lambda_1 \ldots, \lambda_r$. Le second membre étant un polynome en $\lambda_1 \ldots, \lambda_r$ devra être identiquement nul, c'est-à-dire que tous ses coefficients seront nuls. En d'autres termes, l'expression

$$\underset{x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}}{\mathrm{V}} x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}$$

est nulle quand la somme des entiers $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$ est au plus égale à n. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On simplifie l'écriture de l'identité fonctionnelle (5) au moyen de notations convenables. Désignons d'une façon générale par M l'ensemble des r quantités $m_1, m_2, \ldots, m_r$ (l'ordre n'étant pas indifférent) ; de sorte que par exemple l'ensemble des r nombres $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_r^{(i)}$ sera représenté par $X^{(i)}$. Représentons de même par F_M la valeur de la fonction

$f(m_1, m_2, \ldots, m_r)$, de sorte que par exemple

$$\Phi_{X^{(i)}} \equiv \varphi(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_r^{(i)}).$$

Enfin, représentons d'une façon générale l'ensemble des r nombres x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_r+y_r par le symbole $X+Y$.

On voit alors que *tout polynome de degré n, à un nombre quelconque r de variables, sera une fonction continue par rapport à l'ensemble de ces variables, $f(x_1, \ldots, x_r)$ satisfaisant à l'identité*

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} F_{X^{(1)}+X^{(2)}+\ldots+X^{(n+1)}} - \sum\limits_{n} F_{X^{(i_1)}+X^{(i_2)}+\ldots+X^{(i_n)}} \\ \quad + \sum\limits_{n-1} F_{X^{(i_1)}+\ldots+(i_{n-1})} - \ldots + (-1)^n \sum\limits_{1} F_{X^{(i_1)}} + (-1)^{n+1} F_0 \equiv 0, \end{array} \right.$$

en appelant F_0 la quantité $f(0, 0, \ldots)$.

On voit que cette identité conserve toujours la même forme, pour une valeur déterminée de n, quand le nombre r des variables varie.

POLYNOMES A UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE DE VARIABLES.

La remarque précédente montrant que l'identité fonctionnelle (5) peut s'écrire sans faire intervenir le nombre de variables dont dépend la fonction, on est amené à se servir de cette identité pour définir les polynomes dépendant d'une infinité de variables.

Nous pouvons en effet concevoir des fonctions d'une suite infinie de variables ([1]). Seulement, il peut arriver que ces fonctions ne soient définies que quand les variables varient dans un certain champ. Étant donnée

---

([1]) Par exemple, la somme d'une série convergente dépend de la valeur de chacun de ses termes; une fonction continue est déterminée par l'ensemble dénombrable de ses valeurs aux points d'abscisses rationnelles, etc une suite infinie de nombres réels x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ..., on pourra la désigner par le symbole X et l'on représentera par X + Y la suite $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, ..., $x_r + y_r$, $x_{r+1} + y_{r+1}$, ...

Une fonction

$$F_X = f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots)$$

sera *définie dans* (C) si, à tout symbole

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots),$$

pris dans un certain champ (C), correspond un nombre F_X bien déterminé. Nous pourrons alors généraliser la définition d'un polynome pour un champ (C) quelconque, pourvu que ce champ soit tel que si X et Y lui appartenait; il en est de même de X + Y.

Dans ces conditions, nous pourrons appeler *polynome de degré n à une suite infinie de variables, une fonction continue*

$$F_X \equiv f(x_1, x_2, \ldots)$$

satisfaisant à l'identité (8) *et ne satisfaisant pas à une identité analogue où n serait remplacé par un nombre entier inférieur.*

Pour compléter cette définition, il faudrait définir exactement la continuité d'une fonction d'une infinité de variables. Pour plus de généralité, je supposerai seulement que, si la fonction

$$F_X \equiv f(x_1, x_2, \ldots)$$

est continue, elle est continue au sens ordinaire par rapport à tout ensemble d'un nombre fini de ses variables et que l'on a

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots) = \lim_{r=\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots),$$

c'est-à-dire qu'en désignant par X_r l'ensemble x_1, x_2, ..., x_r, o, o, ..., on a

$$F_X = \lim_{r=\infty} F_{X_r}.$$

Dans ces conditions, on voit que, si F_X est continue et satisfait à l'identité (8), la fonction

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r) \equiv F_{X_r} \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

est continue par rapport à l'ensemble de ses r variables et satisfait à l'identité (5). Elle représente donc un polynome de degré n par rapport à ces r variables

$$P_r(x_1, \ldots, x_r).$$

On a donc

$$\begin{aligned} F_X = \lim_{r=\infty} F_{X_r} \lim_{r=\infty} P_r(x_1, \ldots, x_r) \\ = P_0 + [P_1(x_1) - P_0] + [P_1(x_1, x_2) - P_1(x_1)] + \ldots \\ + [P_r(x_1, \ldots, x_r) - P_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1})] + \ldots . \end{aligned}$$

De plus, on a évidemment

$$P_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1}) \equiv P_r(x_1, \ldots, x_{r-1}, 0).$$

Donc

$$\begin{aligned} P_r(x_1, \ldots, x_r) - P_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1}) \\ \equiv P_r(x_1, \ldots, x_r) - P_r(x_1, \ldots, x_{r-1}, 0) \\ \equiv x_r Q_r(x_1, \ldots, x_r), \end{aligned}$$

où Q_r est un polynome de degré $n - 1$ au plus. Ainsi l'on peut écrire

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} F_X \equiv P_0 + x_1 Q_1(x_1) + x_2 Q_2(x_1, x_2) + \ldots \\ + x_r Q_r(x_1, \ldots, x_r) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

en sorte que F_X est la somme d'une série de polynomes de degré n dont aucun coefficient ne peut se réduire avec ceux des autres polynomes. D'où l'on conclut que F_X ne peut pas se mettre de deux manières sous la forme (9); autrement dit, que deux polynomes équivalents et de degré n, à une suite infinie de variables, ont nécessairement mêmes coefficients [une fois mis sous la forme (9)].

Réciproquement, tout polynome à une infinité de variables qui est de la forme (9) et convergent dans (C) vérifie l'identité (8) dans le champ (C).

En effet, si $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots)$ est un tel polynome, on a

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots) = \lim_{r=\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

et $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots)$ est un polynome de degré n à r variables qui, comme nous l'avons vu, vérifie l'identité

$$\begin{aligned} &f(x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+\ldots+x_1^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(1)}+x_r^{(2)}+\ldots+x_r^{(n+1)}, 0, 0, \ldots) \\ &\quad -\sum_n f(x_1^{(i_1)}+\ldots+x_1^{(i_n)}, \ldots, x_r^{(i_1)}+\ldots+x_r^{(i_n)}, 0, 0, \ldots)+\ldots \\ &\quad +(-1)^n \sum_1 f(x_1^{i_1}, \ldots, x_r^{(i_n)}, 0, 0, \ldots)+(-1)^n f(0, 0, \ldots, 0, \ldots)=0. \end{aligned}$$

Si donc

$$\begin{aligned} X^{(1)} &\equiv (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}, x_{r+1}^{(1)}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X^{(n+1)} &\equiv (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(n+1)}, x_{r+1}^{(n+1)}, \ldots) \end{aligned}$$

appartiennent au champ (C) où F_X est défini, le premier membre de cette expression tendra vers le premier membre de l'identité (8), qui se trouve ainsi vérifiée.

Je n'ai pas précisé la notion de continuité d'une fonction d'une suite infinie de variables. On peut la définir ainsi. Supposons qu'à deux suites quelconques de variables $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ faisant partie du champ C, on puisse faire correspondre un nombre $(X^{(1)}, X^{(2)}) \geqq 0$

qui ne s'annule que si $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont formées de deux suites de variables respectivement égales et tel de plus que, quels que soient, dans le champ C, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, on ait

$$(X^{(1)}, X^{(2)}) \leqq (X^{(1)}, X^{(3)}) + (X^{(2)}, X^{(3)}).$$

On pourra appeler $(X^{(1)}, X^{(2)})$ l'écart des deux points $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ (1). Nous supposerons aussi que, si $(X^{(1)}, X^{(2)})$ tend vers zéro, les différences $(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})$ des « coordonnées » de même rang de $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ tendent vers zéro et que l'écart des points

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots) \quad \text{et} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots)$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Enfin, nous admettrons que le champ (C) contient toutes les suites X dont les termes sont nuls à partir d'un rang arbitraire.

Alors nous pourrons dire que F_X est une fonction continue de X si F_Y tend toujours vers F_X quand l'écart (Y, X) tend vers zéro.

Pour donner un exemple précis nous pouvons nous placer successivement au point de vue suivant.

1° Le champ C est formé par toutes les suites infinies possibles $(x_1, x_2, \ldots)$, et nous prenons, pour définir l'écart, la quantité (2)

$$(X, Y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{1}{2}\,\frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \ldots + \frac{1}{n!}\,\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \ldots.$$

Il est facile de voir qu'elle satisfait à toutes les conditions précédentes et que pour que (X, Y) tende vers

(1) *Voir* ma Thèse : *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, p. 30.

(2) *Loc. cit.*, p. 39.

zéro, il faut et il suffit que $(x_1 - y_1)$, $(x_2 - y_2)$, ..., $(x_n - y_n)$, ... tendent respectivement et *indépendamment* vers zéro. Alors, une fonction continue $f(x_1, x_2, \ldots)$ est une fonction telle que, si $y_1, y_2 \ldots$ tendent ensemble (uniformément ou non) vers x_1, $x_2, \ldots$, $f(y_1, y_2, \ldots)$ tend vers $f(x_1, x_2, \ldots)$.

2° Le champ C est limité aux suites de variables $(x_1, x_2, \ldots)$, telles que la suite des carrés de ces variables $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots)$ soit une série convergente. Il est facile de voir que, si X et Y appartiennent au champ, il en est de même de $X + Y$.

Nous prendrons alors, pour définir l'écart, l'expression convergente (¹)

$$(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots},$$

qui satisfait encore aux conditions précédentes. [Mais, ici, il ne suffit plus que $(x_1 - y_1)$, $(x_2 - y_2)$, ... tendent vers zéro pour que (X, Y) tende vers zéro.]

Les théorèmes démontrés précédemment s'appliquent dans ces deux conventions.

Remarque. — La forme (9) permettrait de définir directement les polynomes à une infinité de variables. Mais la définition par l'identité (9) apparaît comme plus générale, car elle seule s'étend sans modification aux *fonctionnelles* (²) d'ordres entiers, comme je le montrerai ailleurs (³).

(¹) *Voir* ce même Recueil, FRÉCHET, *Essai de Géométrie analytique à une infinité de coordonnées*, 1ʳᵉ série, t. VIII, juillet 1908, p. 1, 23.

(²) *Voir*, par exemple, HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, p. 282, sous presse chez Hermann, ou FRÉCHET, *Sur les opérations linéaires* (*Transactions of the american mathematical Society*).

(³) *Voir* FRECHET, *Toute fonctionnelle continue est dévelop-*

Fonctions analytiques.

Nous avons montré dans ce qui précède comment on peut définir les *polynomes* par une condition fonctionnelle. Il est assez naturel de chercher à étendre ce procédé à des fonctions plus générales que les polynomes. Sans développer ici cet ordre d'idées, je me bornerai à énoncer le théorème suivant :

Soit $f(x)$ *une fonction développable en série entière dans un intervalle* $(-R, +R)$. *Si* x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *sont des quantités arbitraires, mais telles que les sommes d'un nombre quelconque d'entre elles* $(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_r})$ *restent toutes en valeurs absolues inférieures à un nombre fixe* $k < \frac{R}{2}$, *on a*

$$\lim_{n=\infty}\Big[f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}) - \sum_{n} f(x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}) + \ldots + (-1)^n \sum_{1} f(x_{i_1}) + (-1)^{n+1} f(0)\Big] = 0.$$

Si $R = \infty$, *il suffit de prendre pour* k *un nombre fini arbitraire.*