Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 141-142

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__141_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2099.

(1908, p. 478.)

Si l'on considère les trois équations

$$\frac{a}{b-x}+\frac{b}{x-a}+\frac{x}{a-b}=0, \tag{1}$$

$$\frac{a}{(b-x)^2}+\frac{b}{(x-a)^2}+\frac{x}{(a-b)^2}=0, \tag{2}$$

$$\sqrt[7]{x-a}+\sqrt[7]{b-x}=\sqrt[7]{b-a}, \tag{3}$$

l'équation (2) *du cinquième degré contient les trois racines de l'équation* (1).

Les deux autres racines de (2) *sont racines doubles de l'équation* (3) *qui a six racines.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Rose.

Les équations (1) et (2) s'écrivent encore

$$\left\{\begin{aligned} &x^3-(a+b)x^2-(a^2+b^2-3ab)x\\ &\qquad\qquad+(a+b)(a-b)^2=0,\end{aligned}\right. \tag{1'}$$

$$\left\{\begin{aligned} &x^5-2(a+b)x^4+(a^2+b^2+4ab)x^3\\ &\quad+(a+b)(a^2+b^2-4ab)x^2\\ &\quad-[2(a-b)^2(a^2+b^2)-a^2b^2]x\\ &\qquad\qquad+(a^3+b^3)(a-b)^2=0.\end{aligned}\right. \tag{2'}$$

Or le premier membre de (2′) est égal au premier membre de (1′) multiplié par l'expression

$$x^2-(a+b)x+a^2+b^2-ab$$

qui s'annule pour

$$x=\frac{(a+b)\pm(a-b)\sqrt{3}}{2}. \tag{4}$$

Donc l'équation (2) contient les racines de (1).

Pour résoudre l'équation (3), on pose

$$x - a = y^7, \qquad b - x = z^7, \qquad b - a = c^7;$$

on est ainsi ramené au système

$$y + z = c, \qquad y^7 + z^7 = c^7;$$

Or, on a successivement

$$y^7 + z^7 = (y+z)^7 - 7yz(y+z)^5 + 14y^2z^2(y+z)^3 - 7y^3z^3(y+z)$$

ou

$$c^7 = c^7 - 7yzc^5 + 14y^2z^2c^3 - 7y^3z^3c$$

ou

$$yz(yz - c^2)^2 = 0,$$

qui se décompose en

$$y = 0, \qquad z = 0, \qquad yz = c^2.$$

Les deux premières donnent

$$x = a, \qquad x = b,$$

et la troisième donne l'équation comptée deux fois

$$(x-a)(b-x) = (b-a)^2.$$

Or, cette dernière admet pour racines les valeurs (4). Donc les racines doubles de (3) sont les racines de (2) qui ne satisfont pas à (1). De plus, l'équation (3) a six racines.