Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 89-95

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__89_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2081.

Construire une hyperbole bitangente à deux cercles et ayant un axe transverse de longueur donnée.

(M. Tétu.)

SOLUTION

Par M. Pierre Favre.

Si l'on considère, sans le construire, un hyperboloïde de révolution circonscrit aux deux sphères admettant les cercles donnés pour grands cercles, et dont le rayon du cercle de gorge est la moitié de la longueur donnée: tout plan tangent en un point du cercle de gorge coupe les deux sphères ci-dessus suivant deux cercles dont on connaît les centres et dont il est facile de construire les rayons.

Il suffit de mener les tangentes communes, soit intérieures, soit extérieures, à ces deux cercles, pour avoir les asymptotes *en position* de l'hyperbole méridienne cherchée.

Ce procédé donne donc deux solutions.

Autre solution par M. V. Hioux.

2082.

On considère sur une courbe un point d'inflexion O *et un point voisin* M. *Si l'on désigne par* R_1 *le rayon du cercle osculateur en* M, *par* R_2 *le rayon du cercle qui est tangent à la courbe en* M *et qui passe en* O, *par* R_3 *le rayon du cercle qui passe en* M *et qui est tangent à la courbe en* O; *les rayons* R_1, R_2, R_3 *tendent à devenir inversement proportionnels aux nombres* 3, 2, 1, *lorsque le point* M *tend à se confondre avec le point* O.

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. Tétu.

Je rapporte la courbe à deux axes rectangulaires tels que Ox soit la tangente d'inflexion et Oy la perpendiculaire à celle-ci en O.

L'équation de la courbe est

$$y = Ax^3 + x^4 \times \varphi(x).$$

On a, dès lors,

$$R_1 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1+9A^2x^4+\dots)^{\frac{3}{2}}}{6Ax}$$

Je n'écris pas les termes contenant en facteur des puissances supérieures de x. Calculons R_2. Si a et b sont les coordonnées du centre du cercle, on a

$$\left\{\begin{aligned} x^2+y^2-2ax-2by &= 0,\\ y' &= -\frac{x-a}{y-b}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 2ax+2by &= x^2+y^2,\\ a+by' &= x+yy', \end{aligned}\right.$$

d'où

$$a = \frac{(x^2-y^2)y'-2xy}{2(xy'-y)},$$

$$b = \frac{x^2-y^2+2xyy'}{2(xy'-y)},$$

ce qui donne

$$R_2 = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}}{2(xy'-y)}$$

$$= \frac{(x^2+A^2x^6+\dots)(1+9A^2x^4+\dots)}{4Ax^3+\dots} = \frac{1+10A^2x^4+\dots}{4Ax}.$$

Calculons R_3. R_3 est donné par l'équation

$$x^2+y^2-2R_3y = 0,$$

$$R_3 = \frac{x^2+y^2}{2y} = \frac{1+A^2x^4+\dots}{2Ax+\dots};$$

R_1, R_2, R_3 sont donc des infiniment grands respectivement équivalents à

$$\frac{1}{6Ax}, \quad \frac{1}{4Ax}, \quad \frac{1}{2Ax},$$

ce qui montre que ces quantités sont inversement proportionnelles aux nombres 3, 2, 1.

2083.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 *cinq semi-sphères. S'il existe une semi-sphère tangente, d'une part, aux deux semi-plans qui touchent* S_1, S_2, S_3, *et inscrite, d'autre part, au semi-cône de révolution circonscrit à* S_4 *et* S_5, *on peut obtenir neuf semi-sphères analogues en permutant de toutes les manières possibles les rôles assignés aux semi-sphères* S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. (R. B.)

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

Pour bien faire comprendre le principe de la solution, je commencerai par démontrer la proposition analogue de géométrie plane :

Soient C_1, C_2, C_3, C_4 *quatre cycles dans le même plan. S'il existe un cycle touchant les tangentes communes à* C_1 *et* C_2 *et les tangentes communes à* C_3 *et* C_4, *on peut obtenir deux cycles analogues en permutant de toutes les manières possibles les rôles assignés aux cycles* C_1, C_2, C_3, C_4.

La démonstration est immédiate en ayant recours à la représentation d'un cycle par un point de l'espace : prenons trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz tels que le plan Oxy contienne les quatre cycles donnés. Soient x_i, y_i les coordonnées du centre du cycle C_i, et R_i son rayon (ce dernier étant affecté d'un signe, puisqu'il s'agit d'un cycle). On représentera le cycle C_i par le point de l'espace P_i de coordonnées x_i, y_i, R_i. On voit que le point P_i est le sommet d'un cône de révolution d'angle droit qui passe par le cycle C_i.

Le lieu des points représentatifs des cycles tangents aux tangentes communes à C_i et C_2 est une droite. En effet, tous ces cycles sont homothétiques par rapport au centre de similitude des cycles C_1 et C_2, et il en est de même des cônes de révolution d'angle droit qui les contiennent.

Si donc les quatre cycles satisfont à la condition de l'énoncé, la droite qui joint les points représentatifs des cycles C_1 et C_2 doit rencontrer la droite qui joint les points représentatifs des cycles C_3 et C_4. Cela revient à dire que les quatre points représentatifs sont dans un même plan. Cette propriété étant symétrique par rapport aux quatre cycles, la proposition énoncée en résulte.

Démontrons maintenant l'énoncé 2083.

Ayant pris trois axes rectangulaires quelconques, désignons par x_i, y_i, z_i, R_i les coordonnées du centre et le rayon de la semi-sphère S_i. On représentera cette dernière par le point de l'espace à quatre dimensions, de coordonnées x_i, y_i, z_i, R_i.

Cela posé, quand une semi-sphère varie en restant tangente à deux semi-plans fixes, son centre décrit un plan passant par la droite commune aux deux semi-plans, et son rayon est proportionnel à la distance de son centre à cette même droite. Il existe donc deux relations linéaires entre les coordonnées de son centre et son rayon. Cela revient à dire que *son point représentatif dans l'espace à quatre dimensions décrit un plan.*

Quand une semi-sphère varie en restant inscrite à un semi-cône de révolution, son centre décrit une droite passant par le sommet de ce semi-cône, et son rayon est proportionnel à la distance de son centre à ce même sommet. Il existe donc trois relations linéaires entre les coordonnées de son centre et son rayon. Cela revient à dire que *son point représentatif dans l'espace à quatre dimensions décrit une droite.*

Il résulte alors de l'énoncé que la *droite* joignant les points représentatifs des semi-sphères S_4, S_5 rencontre le *plan* passant par les points représentatifs des semi-sphères S_1, S_2, S_3. Par conséquent, les cinq points représentatifs sont dans un même *espace linéaire,* et la droite joignant deux quelconques d'entre eux rencontre le plan qui passe par les trois autres. On en conclut immédiatement la proposition énoncée.

2086.

(1907, p. 528.)

Soit OCA *un triangle rectangle en* C *et tel que* CA = CO ; *sur* OC, *à partir du point* O, *et du côté du point* C, *on prend* OS = OA *et l'on mène par* O *une parallèle à* AS *qui rencontre en* B *le prolongement de* AC.

AS *est le côté et* CB *l'apothème du pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon* CA.

CS *est la hauteur d'une pyramide régulière à base pentagonale et telle que l'arête* SA *est égale au côté de la base ;* OS *est le rayon de la sphère circonscrite à cette pyramide.*

AS *est le côté de l'icosaèdre régulier inscrit dans la sphère de rayon* OS ; SBO *est la moitié de l'angle dièdre de cet icosaèdre.* (E. Lacour.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Considérons la section de l'icosaèdre et de la sphère circonscrite par un plan passant par deux arêtes opposées SA, S'A', qui sont symétriques par rapport au centre de la sphère ; elle se compose d'un hexagone SAB'S'A'B dont les côtés AB', B'S', A'B et BS sont égaux à la hauteur du triangle équilatéral de côté SA. L'angle SBA' est le rectiligne d'un dièdre du polyèdre, SBO en est la moitié.

Le diamètre SS' est perpendiculaire sur la base de la pyramide pentagonale de sommet S, il rencontre la trace AB de cette base en C ; donc, CS est la hauteur de cette pyramide, AS est le côté et CB est l'apothème du pentagone inscrit dans le cercle de rayon CA.

Abaissons la perpendiculaire OI sur AS et joignons AA' qui rencontre OB en K ; OB = OI est la distance du centre de la sphère aux différentes arêtes, OK est la moitié du côté SA.

Il reste à montrer que CA = 2CO : on a

$$CA.OS = 2\,SI.OI = 2\,OK.OB = 2\,OC.OS,$$

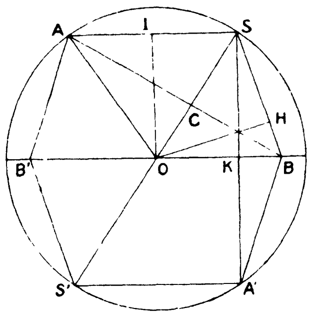
donc

$$CA = 2\,OC.$$

On retrouve ainsi une construction bien connue du côté du pentagone et du décagone inscrits dans un cercle de rayon donné.

CS est le côté du décagone inscrit dans le cercle de rayon AC.

On peut résumer ces différents résultats dans un triangle OSB dans lequel $SB = OK\sqrt{3}$ et $OB = SK$.



La troisième hauteur OH est la distance du centre de la sphère aux faces, H est au tiers de BS.

Pour construire un tel triangle, prenons un segment OB, menons une parallèle à la distance $\frac{OB}{3}$ et décrivons la circonférence de diamètre OB qui rencontre la parallèle en H ; prolongeons BH en S tel que $BS = 3BH$ et joignons BS.

Relations. — On a facilement, en posant $OS = 1$,

$$\sin SBA' = \frac{2}{3}, \qquad \operatorname{tang} SOB = \sqrt{3} \sin SBO,$$

$$AC = 2OC = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \qquad CS = \frac{5-\sqrt{5}}{5},$$

$$SA = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}, \qquad OB = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}},$$

$$OH = \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}}{30}}, \qquad BC = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

Remarquons que $2BC + CS = 2$, *donc on a aussi*

$$CS' = 2CB.$$

Dodécaèdre. — Considérons de même la section par un plan passant par deux arêtes parallèles opposées SA, S'A'. Dans ce cas le point H serait le centre d'une face pentagonale, HB est l'apothème du pentagone inscrit dans un cercle de rayon HS.

Pour construire le triangle OSB donnant les éléments du dodécaèdre, nous mènerons une parallèle à OB à une distance d telle que $\frac{d}{\text{OB} - d}$ soit égal au rapport de l'apothème au rayon d'un pentagone régulier, et l'on achèvera la construction comme dans le cas précédent.

Les angles et les segments se calculent sans difficulté.

Autre solution par M. Bros.