TR. LALESCO

Sur une propriété caractéristique des surfaces de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 85-87

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__85_1>

[O5jα]

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. TR. LALESCO.

Dans une Note récente publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XXXI, p. 269), M. G. Tzitzéica a démontré une intéressante propriété comme étant *caractéristique* des surfaces de révolution. Elle peut s'énoncer de la manière suivante :

Sur toutes les lignes asymptotiques d'une surface de révolution, on a la relation

$$s = \pm f(r) + C,$$

r étant la distance de ses points à un point fixe et *s l'arc de l'asymptotique compté à partir d'une origine arbitraire.*

Je veux donner ici une autre démonstration plus rapide qui nous permettra aussi de signaler un cas d'exception.

Prenons comme origine le point fixe et sur la surface comme lignes coordonnées les courbes $r =$ const. et leurs trajectoires orthogonales. L'élément linéaire de la surface s'écrira

$$(1) \qquad ds^2 = A^2 dr^2 + C^2 du^2.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est alors

$$(2) \qquad ds^2 - f'^2(r)\,dr^2 = [A^2 - f'^2(r)]\,dr^2 + C^2 du^2 = 0,$$

ce qui montre que les lignes de coordonnées sont justement les lignes de courbure de la surface.

Les relations

$$(2') \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial r} = a\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\frac{\partial \theta}{\partial r} \qquad (\theta = x, y, z)$$

nous donnent

$$\mathrm{S}\,x\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial r} = a\,\mathrm{S}\,x\frac{\partial x}{\partial u} + b\,\mathrm{S}\,x\frac{\partial x}{\partial r},$$

d'où, puisque

$$\mathrm{S}\,x\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}\,x\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\mathrm{S}\,x\frac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial r} = 0.$$

il résulte

$$b = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} = 0.$$

On a donc

$$A = \varphi(r).$$

Des relations (1) et (2) on a immédiatement

$$(3) \qquad \frac{R}{R'} = \frac{\varphi^2(r)}{[\varphi^2(r) - f'^2(r)]},$$

R et R′ désignant les rayons de courbure principaux, à condition toutefois que $\varphi^2(r) - f'^2(r) \neq 0$.

D'autre part, la relation bien connue et fondamentale

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{R}\right) = \frac{1}{R'}\frac{\partial A}{\partial u}$$

montre que R ne dépend que de r; il en résulte, à cause de (3), que R′ dépend également de r seul.

Le rayon de courbure principal le long des courbes $r = \text{const.}$ étant dès lors constant, la surface est l'enveloppe d'une sphère dépendant d'un paramètre variable; les courbes caractéristiques sont justement les courbes $r = c$ qui sont ainsi des cercles. La tangente à la courbe décrite par le centre de cette sphère devant passer dans chacune de ses positions par le point O (car la caractéristique doit être située aussi sur une sphère de centre O), cette courbe doit se réduire à une droite. Donc la surface est de révolution.

Les conclusions précédentes ne sont plus applicables si

$$\varphi(r) = \pm f'(r).$$

Dans ce cas-ci, on a $R = \infty$; un des systèmes de lignes de courbure est donc formé par des droites, qui passent nécessairement par l'origine, comme cela résulte immédiatement des relations (2′). La surface est donc, dans ce cas particulier, un cône quelconque et elle jouit évidemment de la propriété établie plus haut, car on a, le long des génératrices, qui sont ses lignes asymptotiques,

$$s = r.$$