NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. HAAG

Déformations conservant la direction des plans tangents

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 83-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__83_0>

[O6K]

DÉFORMATIONS CONSERVANT LA DIRECTION DES PLANS TANGENTS;

PAR M. J. HAAG.

Dans une Note parue en octobre dernier dans les *Nouvelles Annales*, j'ai démontré incidemment qu'on ne peut pas déformer une sphère de telle façon que le plan tangent en chaque point demeure parallèle à lui-même. Il est facile de voir qu'il n'y a que les surfaces minima qui jouissent de cette propriété.

Soient, en effet, deux surfaces S et S_1 applicables l'une sur l'autre, avec correspondance des plans tangents parallèles. Rapportons-les au réseau conjugué commun, en négligeant le cas où ce réseau se réduirait à une famille de lignes asymptotiques, hypothèse qui conduit à deux surfaces égales ou symétriques. On a alors

$$(1) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \mu \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Écrivons que les deux surfaces sont applicables. On obtient

$$\lambda^2 E = E, \qquad \lambda\mu F = F, \qquad \mu^2 G = G.$$

Premier cas : $EF \neq 0$. — On a nécessairement

$$\lambda^2 = \lambda\mu = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \mu = \pm 1.$$

Les surfaces S et S_1 sont alors égales ou symétriques.

Deuxième cas : $F = 0$. — On a la nouvelle solution

$$\lambda = 1, \qquad \mu = -1.$$

Mais, en éliminant x entre les équations (1), il vient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

De même pour y et z. D'où

$$\begin{aligned} x &= U + V, & y &= U_1 + V_1, & z &= U_2 + V_2, \\ x_1 &= U - V, & y_1 &= U_1 - V_1, & z_1 &= U_2 - V_2. \end{aligned}$$

La surface S, par exemple, est une surface de translation par rapport à ses lignes de courbure. On en déduit aisément que c'est un cylindre et que S_1 est un cylindre égal ou symétrique.

Troisième cas : $E = 0$, $G = 0$. — On a l'unique condition

$$\lambda \mu = 1.$$

Mais, dans ce cas, les lignes de longueur nulle sont conjuguées. On a donc deux surfaces minima. Elles sont d'ailleurs associées. En effet, on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

En combinant ces deux équations avec les équations (1), on obtient

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0.$$

D'où

$$\lambda = e^{\theta}, \qquad \mu = e^{-\theta}, \qquad \theta = \text{const}.$$

Si l'on pose alors

$$x = U + V, \qquad y = U_1 + V_1, \qquad z = U_2 + V_2,$$

on en déduit

$$x_1 = e^\theta U + e^{-\theta} V, \quad y_1 = e^\theta U_1 + e^{-\theta} V_1, \quad z_1 = e^\theta U_2 + e^{-\theta} V_2,$$

formules qui définissent bien une des surfaces minima associées à la surface minima S.

Il resterait le cas de $E = 0$, $F = 0$, qui donnerait des surfaces imaginaires peu intéressantes.

En résumé, *il n'y a que les surfaces minima associées qui répondent à la question que nous nous étions posée.*

Remarquons, en terminant, que ce problème est un cas particulier du problème de Christoffel, qui conduit, comme on sait, aux surfaces minima et aux surfaces isothermiques.