G. FONTENÉ

Sur les quadrangles de Desboves

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 73-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__73_0>

[K8f]

SUR LES QUADRANGLES DE DESBOVES;

PAR M. G. FONTENÉ.

Les côtés d'un quadrangle plan ABCD étant désignés comme il suit :

$$\mathrm{AB} = a, \qquad \mathrm{BC} = b, \qquad \mathrm{CD} = c,$$
$$\mathrm{DA} = d, \qquad \mathrm{AC} = e, \qquad \mathrm{BD} = f,$$

j'ai proposé d'appeler *quadrangles de Desboves* les quadrangles *non inscriptibles* pour lesquels on a

$$\frac{e}{f} = \frac{da + bc}{dc + ab}, \qquad \text{ou} \qquad fbc - ecd + fda - eab = 0.$$

Si l'on fait une inversion de pôle D, la relation précédente

$$\mathrm{DB.DC} \times \mathrm{BC} - \mathrm{DC.DA} \times \mathrm{CA} + \mathrm{DA.DB} \times \mathrm{AB} - \mathrm{BC.CA.AB} = 0$$

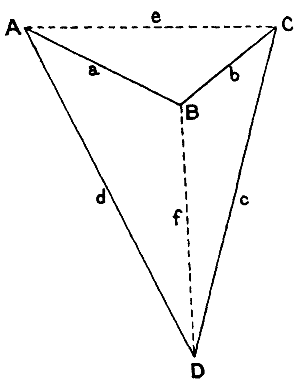
donne

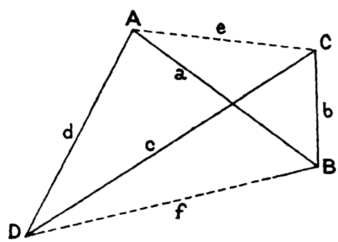
$$\overline{\mathrm{DA}'}^2 \times \mathrm{B'C'} - \overline{\mathrm{DB}'}^2 \times \mathrm{C'A'} + \overline{\mathrm{DC}'}^2 \times \mathrm{A'B'} = \mathrm{B'C'.C'A'.A'B'},$$

sans que les points A', B', C' *soient en ligne droite.*

Or, si l'on suppose donnés les points A', B', C' non en ligne droite, le lieu des points D qui satisfont à la relation précédente est une circonférence ayant pour centre le barycentre des points A', B', C' affectés des coefficients a', $-b'$, c', en désignant par a', b', c' les côtés du triangle A'B'C', c'est-à-dire une circonférence ayant pour centre le centre du cercle exinscrit situé dans l'angle B'; cette circonférence passe par les deux points en lesquels le cercle circonscrit au triangle A'B'C' est rencontré par la droite qui joint les pieds des bissectrices des angles A′ et C′ et le pied de la bissectrice de l'angle extérieur en B′. (La recherche du lieu précédent faisait partie de la question de Mathématiques élémentaires posée au Concours d'agrégation en 1906; le fait que cette circonférence passe par les deux points qui ont été indiqués est emprunté à la solution qui a paru dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires.*)

Ce qui précède donne le moyen de construire un quadrangle de Desboves en partant d'un triangle A′B′C′ et en faisant une inversion de pôle D, le point D étant pris sur la circonférence dont on vient de parler. On reconnaît ainsi qu'un tel quadrangle peut affecter l'une ou l'autre des deux formes suivantes :





Lorsque le contour ABCD *est convexe, l'hypothèse*

$$\frac{e}{f} = \frac{da + bc}{dc + ab}$$

correspond nécessairement à un quadrangle inscriptible.

Note. — Je ne sais si l'on a remarqué que l'hypothèse

$$ef = ac + bd,$$

faite sur un quadrangle ABCD *qu'on ne suppose pas être* a priori *un quadrangle plan,* entraîne pour ce quadrangle la nécessité d'être plan et inscriptible à un cercle. En effet, si l'on effectue une inversion de pôle D, la relation précédente

$$DB.CA = DC.AB + DA.BC$$

donne pour les points inverses

$$C'A' = A'B' + B'C',$$

ce qui exige que les points A', B', C' soient en ligne droite; dès lors, les quatre points A, B, C, D sont à un cercle.