NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ALESSANDRO PADOA

Une question de maximum (méthode synthétique)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 529-535

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__529_0>

[K'10c]

UNE QUESTION DE MAXIMUM

(Méthode synthétique);

PAR M. ALESSANDRO PADOA
(Genova, Italie).

Après plusieurs dizaines d'années, on peut encore regretter avec Steiner (¹) que, dans l'étude des questions de *maximum* et de *minimum* qu'on rencontre en Géométrie, la *synthèse* ait été presque entièrement négligée pour la voie plus uniforme de l'*analyse*.

En effet, tandis qu'il y a bien des cas où les règles générales de l'analyse ne conduisent ni directement ni facilement au but, la synthèse nous aide à découvrir la liaison intime entre les propriétés des figures étudiées et nous offre des démonstrations d'une simplicité et d'une élégance très remarquables.

Mais, parmi ces démonstrations, il y en a qui peuvent être perfectionnées, tant au point de vue de la simplicité qu'à celui de la rigueur.

Ici, je m'occuperai seulement de la proposition 17 (p. 105) : *Entre toutes les figures planes isopérimètres, le cercle est le maximum.*

Steiner débute dans sa démonstration par les considérations suivantes :

Il est clair qu'il y a une infinité de figures d'un

(¹) *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général* [*Crelle's Journal*, t. 24, Berlin, 1842. Premier Mémoire traduit de l'allemand en français par M. Wertheim, p. 93-152; second Mémoire (*id.*), par M. Fœlsing, p. 189-250].

périmètre donné qui ont diverses formes et diverses aires. On comprend de même que l'aire pourra devenir aussi petite qu'on voudra, mais non pas aussi grande qu'on voudra, puisqu'elle reste évidemment toujours comprise dans l'intérieur du cercle décrit d'un des points de son contour comme centre avec un rayon égal à la moitié du périmètre donné. Mais, puisque des figures de périmètre donné peuvent avoir différentes aires, sans pouvoir toutefois grandir indéfiniment, il faut qu'il ait entre elles une *figure maximum ou* plusieurs *maxima de différentes formes, c'est-à-dire plusieurs figures de différentes formes et d'une même aire, plus grande que celle des autres figures.*

Je remarque que la conclusion n'est pas conséquence nécessaire des considérations faites; celles-ci permettaient seulement d'affirmer *l'existence d'un* (ou de plusieurs) *maximum ou d'une limite supérieure* (1).

Or, comme pour la démonstration, que je vais transcrire, il faut admettre l'existence du maximum en question, en excluant par suite celle de la limite supérieure, je propose explicitement le *postulat :*

1° *Dans un ensemble de figures planes isopérimètres, il y en a une* (au moins) *dont l'aire est maximum* (2).

---

(1) En effet, les *premisses* restent *vraies* (sauf la considération superflue *que l'aire pourra devenir aussi petite qu'on voudra*) si au lieu de *figures* on lit *polygones*, tandis qu'en ce cas la *conclusion* devient *fausse* (parce que les aires d'un ensemble de polygones isopérimètres, au lieu d'un *maximum*, ont une *limite supérieure :* l'aire du cercle isopérimètre aux polygones donnés). Ce qui prouve que *la conclusion n'est pas conséquence nécessaire des prémisses.*

(2) Sans ce postulat, ce qui suit ne démontre pas la proposi-

Voici la démonstration de Steiner [1] :

Soit α une des figures maxima.

A chaque point A *du périmètre correspond un second point* B, *placé de manière que ces deux points divisent le périmètre en deux parties* égales β_1 *et* β_2.

Alors la droite AB *divise la figure* α *en deux parties équivalentes* α_1 *et* α_2*; car, si l'une d'elles était plus grande que l'autre, on pourrait remplacer la seconde par une figure égale à la première, puisqu'elles sont isopérimètres et qu'elles ont la base* AB *en commun; l'aire de la figure entière* α *se serait ainsi accrue sans changer de périmètre, ce qui est contraire à l'hypothèse; donc les deux parties* α_1 *et* α_2 *doivent être équivalentes.*

Maintenant, soit C *un point quelconque de* β_1 (A *et* B *exclus*).

Si l'angle ACB *n'était pas droit, on pourrait agrandir l'aire du triangle* ACB *sans changer la longueur de ses côtés* AC *et* CB [2], *ce qui permettrait de conserver les parties de* α_1 *qui étaient appuyées sur ces côtés* [3]; *on obtiendrait ainsi une*

---

tion 17, mais seulement que, *si une figure plane est le maximum entre ses isopérimètres, elle est un cercle.*

Je ne crois pas qu'on puisse éviter ce postulat sans en admettre d'autres (car le concept général de *figure plane* n'appartient pas proprement à la Géométrie *élémentaire* traditionnelle) et sans compliquer la question, au lieu de la simplifier.

(1) Que j'abrège en y supprimant des considérations encombrantes qui nuisent à sa clarté.

(2) Ici l'auteur cite sa proposition 6 (p. 99) :

Entre tous les triangles construits avec deux côtés donnés, celui dans lequel ces deux côtés seront perpendiculaires l'un à l'autre sera un maximum.

(3) Ces parties étaient (et doivent être) placées hors du triangle; car, autrement, il aurait suffi de remplacer les parties en dedans

figure α'_1 plus grande que α_1, dont le périmètre se composerait d'une ligne de la même longueur que β_1 *et de la nouvelle base* A′B′. *Par suite, en remplaçant α_2 par la figure symétrique de α'_1 (par rapport à* A′B′), *l'aire de la figure totale deviendrait plus grande, sans que le périmètre changeât de longueur, ce qui est contraire à l'hypothèse.*

Puisque l'angle ACB *est droit quel que soit le point* C *de β_1 (ou de β_2), il s'ensuit que la figure en question est un cercle.*

Cette démonstration est très jolie; est-elle rigoureuse?

Certainement il faut être un peu raffiné pour ne pas être satisfait, dès le commencement, de la détermination du point B [1], d'autant plus que le raisonnement n'exige pas qu'on sache le *construire,* mais seulement qu'on admette qu'il *existe;* et tout le monde sera bien disposé à l'admettre. Cependant, puisque d'aucune proposition de la Géométrie élémentaire on ne saurait *déduire* l'existence du point B, lorsqu'il s'agit d'une ligne quelconque, il faudrait admettre cette *existence* moyennant un second *postulat.*

Mais nous allons voir qu'on peut s'en passer.

Lisons d'abord l'autre démonstration de la même proposition qu'on trouve dans le second Mémoire de Steiner (p. 197) et qui, elle aussi, suppose la proposition 1° :

---

par leurs symétriques (par rapport aux côtés AC ou CB) pour obtenir une figure isopérimètre à α et d'aire plus grande; ce qui est contraire à l'hypothèse.

[1] Dans la démonstration, le mot *égales,* que j'ai souligné, remplace la phrase *de même longueur;* mais qu'est-ce que *signifie* cette phrase, en Géométrie élémentaire, au sujet d'une ligne quelconque?

Si l'on imagine une figure curviligne quelconque, de périmètre donné, dont l'aire soit un maximum, on n'a qu'à y inscrire un quadrilatère quelconque ABCD; *si l'on regarde les côtés de ce quadrilatère et les parties de la figure qui se trouvent hors du quadrilatère comme constants, il faut que l'aire du quadrilatère soit un maximum; car, si son aire pouvait s'augmenter, l'aire de la figure entière s'augmenterait aussi, sans qu'il y eût changement de périmètre, ce qui serait contraire à l'hypothèse; mais* l'aire du quadrilatère n'est un maximum qu'autant que celui-ci est inscrit à un cercle; *il faut donc que les quatre points quelconques* A, B, C, D *du périmètre de la figure maxima se trouvent dans une circonférence, c'est-à-dire il faut que cette figure maxima soit un cercle.*

C'est plus court et le concept de *longueur* y est évité; malheureusement, cette démonstration est *illusoire*.

En effet, la proposition soulignée qu'on y emploie est un cas particulier de la proposition 25 I du premier Mémoire (p. 111) :

Un polygone de côtés a, b, c, ... donnés est un maximum lorsqu'il est inscriptible dans un cercle, que l'auteur donne comme *conséquence* immédiate d'un théorème *déduit* de la proposition 17!

*
* *

Voici ce que je propose :

D'abord, je dis que deux *lignes* sont *isomères* lorsqu'elles peuvent être décomposées en (un nombre fini de) parties respectivement égales (superposables); c'est une définition analogue à celle d'équivalence entre surfaces ou entre solides.

Soit β une ligne simplement fermée, isomère à une circonférence γ; soit $A'B'$ un diamètre de γ; soient A et B les points de β qui correspondent à A' et B' dans la correspondance isomérique entre β et γ.

Alors A et B divisent β en deux parties isomères β_1 et β_2, ce qui permet de compléter la *première* démonstration de Steiner ([1]), en se passant du second *postulat*.

Ainsi l'on ne démontre pas encore la proposition **17**, mais seulement que :

2° *Entre les figures planes isomères à un cercle* (c'est-à-dire dont le contour est isomère à une circonférence), *celui-ci est le maximum* (c'est-à-dire est la seule figure dont l'aire est maximum).

Maintenant, soient P et P' deux polygones convexes dont les côtés sont respectivement égaux et dont P seulement est inscrit dans une circonférence que nous appellerons γ.

Si nous appuyons sur les côtés de P', en dehors, les petits segments de cercle compris entre P et γ, nous obtiendrons une figure plane dont le contour est isomère à γ, sans être égal à γ.

Pour la proposition 2°, l'aire de cette figure est moindre que celle du cercle γ; en retranchant les segments de cercle considérés, il s'ensuit que $P' < P$. Ainsi nous avons démontré que :

3° *Entre tous les polygones de côtés donnés, le polygone convexe inscrit dans une circonférence est le maximum* ([2]),

c'est-à-dire la proposition **25** I de Steiner.

([1]) On y remplacera la phrase soulignée *de la même longueur que* par *isomère à*.

([2]) Nous nous sommes occupés seulement de polygones *convexes;* mais il est clair que l'aire d'un polygone *concave* ne pourrait pas

Après quoi, celle que Steiner a donnée comme *seconde* démonstration de la proposition 17 *cesse d'être illusoire.*

En résumé, pour donner plus de rigueur aux raisonnements de Steiner en conservant leur belle simplicité, il suffit d'admettre mon postulat 1°, de modifier un peu le commencement de sa *première* démonstration pour en tirer d'abord la proposition 2°, dans laquelle j'ai introduit le concept de *lignes isomères,* et de déduire de celle-ci la proposition 3° qui permet enfin de démontrer la proposition 17 moyennant la *seconde démonstration de* Steiner.