Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 520-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__520_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1954.

(1902, p. 147.)

Trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 *déterminent un réseau ponctuel de quadriques* Q. *Les polaires* D *d'une droite* Δ *par rapport aux surfaces* Q *appartiennent à une congruence :*

1° *Les droites de la congruence sont en général les cordes d'une cubique gauche* C.

2° *Lorsque* Δ *varie, les cubiques* C *rencontrent en huit points une courbe fixe.*

3° *Trouver la surface* S *lieu des droites* Δ *telles que les droites* D *passent par un point fixe, et la courbe lieu de ce point, quand* Δ, *variant, engendre la surface* S.

(R. GILBERT.)

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

1° Soient

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\psi(x, y, z) = 0$$

les équations des quadriques Q_1, Q_2, Q_3. L'équation de Q est

$$\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0,$$

λ, μ, ν étant trois paramètres arbitraires.

Les plans polaires d'un point M par rapport aux quadriques Q passent par un point fixe M', quand λ, μ, ν varient, puisque l'équation du plan polaire dépend linéairement de deux paramètres; les points M, M' sont réciproques.

Soient D_1, D_2, D_3 les polaires de Δ par rapport à Q_1, Q_2, Q_3; supposons que M décrive Δ; les trois plans (M', D_1), (M', D_2), (M', D_3) se correspondent homographiquement deux à deux comme étant les plans polaires de M par rapport à Q_1, Q_2, Q_3. Donc le lieu du point M' est une cubique gauche C dont D_1, D_2, D_3 sont trois cordes; et comme on peut prendre arbitrairement Q_1, Q_2, Q_3, dans le réseau, toutes les polaires D de Δ sont des cordes de la cubique C.

Ceci peut aussi se voir analytiquement. Soient x_0, y_0, z_0, t_0 et x_1, y_1, z_1, t_1 deux points, M_0 et M_1, de Δ. Leurs plans polaires par rapport à Q sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda(x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t) \\ &\quad + \mu(x_0\varphi'_x + y_0\varphi'_y + z_0\varphi'_z + t_0\varphi'_t) \\ &\quad + \nu(x_0\psi'_x + y_0\psi'_y + z_0\psi'_z + t_0\psi'_t) = 0, \\ &\lambda(x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z + t_1 f'_t) \\ &\quad + \mu(x_1\varphi'_x + y_1\varphi'_y + z_1\varphi'_z + t_1\varphi'_t) \\ &\quad + \nu(x_1\psi'_x + y_1\psi'_y + z_1\psi'_z + t_1\psi'_t) = 0, \end{aligned}\right.$$

ce que nous écrirons, pour abréger,

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda R_0 + \mu S_0 + \nu T_0 = 0, \\ \lambda R_1 + \mu S_1 + \nu T_1 = 0, \end{cases}$$

et nous représenterons également par $R_{0,1}$, par exemple, l'expression

$$x_0 f'_{x_1} + y_0 f'_{y_1} + z_0 f'_{z_1} + t_0 f'_{t_1}.$$

Les polaires D de Δ sont définies par le système (1). Si l'on assujettit la droite D à passer par un point x, y, z, t donné, le système (1) donne les rapports des quantités λ, μ, ν. Toutefois il y a indétermination si le Tableau suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} R_0 & S_0 & T_0 \\ R_1 & S_1 & T_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations sont celles d'une cubique C; d'ailleurs, si Δ est prise arbitrairement, ses polaires sont toutes distinctes; donc on voit déjà que C est le lieu des points par lesquels passent une infinité de droites de la congruence des polaires. Soient ensuite x_2, y_2, z_2, t_2 et x_3, y_3, z_3, t_3 deux points, M_2 et M_3, pris sur une des droites D. On a

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda R_{0,2} + \mu S_{0,2} + \nu T_{0,2} = 0, \\ \lambda R_{0,3} + \mu S_{0,3} + \nu T_{0,3} = 0, \\ \lambda R_{1,2} + \mu S_{1,2} + \nu T_{1,2} = 0, \\ \lambda R_{1,3} + \mu S_{1,3} + \nu T_{1,3} = 0; \end{cases}$$

les coordonnées d'un point de D sont

$$(3)\qquad \begin{cases} x = m x_2 + n x_3, \\ y = m y_2 + n y_3, \\ z = m z_2 + n z_3, \\ t = m t_2 + n t_3, \end{cases}$$

et les équations de C sont

$$\begin{aligned} \alpha R_0 + \beta R_1 &= 0, \\ \alpha S_0 + \beta S_1 &= 0, \\ \alpha T_0 + \beta T_1 &= 0. \end{aligned}$$

Remplaçons x, y, z, t de (3) dans les équations de C afin de voir s'il y a des points de D sur C. Nous obtenons ainsi trois équations en $\frac{m}{n}$ qui sont

$$\alpha m \mathrm{R}_{0,2} + \alpha n \mathrm{R}_{0,3} + \beta m \mathrm{R}_{1,2} + \beta n \mathrm{R}_{1,3} = 0,$$
$$\alpha m \mathrm{S}_{0,2} + \alpha n \mathrm{S}_{0,3} + \beta m \mathrm{S}_{1,2} + \beta n \mathrm{S}_{1,3} = 0,$$
$$\alpha m \mathrm{T}_{0,2} + \alpha n \mathrm{T}_{0,3} + \beta m \mathrm{T}_{1,2} + \beta n \mathrm{T}_{1,3} = 0.$$

Multiplions par λ, μ, ν et ajoutons en tenant compte des relations (2); on trouve une identité; donc les trois équations précédentes se réduisent à deux; elles déterminent les rapports $\frac{n}{m} = \mathrm{N}$ et $\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{B}$.

Les deux premières donnent

$$\mathrm{R}_{0,2} + \mathrm{N}\mathrm{R}_{0,3} + \mathrm{B}\mathrm{R}_{1,2} + \mathrm{N}.\mathrm{B}.\mathrm{R}_{1,3} = 0,$$
$$\mathrm{S}_{0,2} + \mathrm{N}\mathrm{S}_{0,3} + \mathrm{B}\mathrm{S}_{1,2} + \mathrm{N}.\mathrm{B}.\mathrm{S}_{1,3} = 0.$$

En éliminant B on a une équation du second degré en N, et, par suite, il y a deux points de D sur la cubique C.

2° et 3° Nous avons dit plus haut que les trois plans $(\mathrm{M}', \mathrm{D}_1)$, $(\mathrm{M}', \mathrm{D}_2)$, $(\mathrm{M}', \mathrm{D}_3)$ se correspondent homographiquement; ceci suppose qu'ils sont déterminés, c'est-à dire que M' n'est pas à la fois sur D_1, D_2 et D_3. Cela peut arriver lorsque M décrit certaines droites, Δ, que nous désignerons uniquement désormais par Δ.

Le point M' décrit alors la courbe J, lieu des points tels que leurs plans polaires par rapport aux quadriques Q passent par une même droite Δ. On obtient, par un calcul immédiat, les équations de J en annulant le Tableau

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z & \psi'_t \end{vmatrix} = 0.$$

On obtiendrait la même courbe en cherchant le lieu des sommets des cônes du réseau. C'est la courbe jacobienne du réseau (SALMON, *Géométrie analytique à trois dimensions*, § 238, a). On voit sur ces équations que J est l'intersection de deux surfaces cubiques ayant en outre en commun une cubique gauche. On en conclut d'abord que J est du sixième ordre. De plus, on en conclut (SALMON, *Id.*, § 345, 346) que, si h est le nombre des points doubles apparents de J, et r le degré de la développable lieu des tangentes, on a

$$h = 7, \qquad r = 16.$$

Des formules de Cayley pour les courbes gauches on déduit de là que la courbe J est de genre 3.

Ceci posé, nous allons montrer que toutes les cubiques C rencontrent J en huit points. En effet, les équations de J sont données par le Tableau (4); par des combinaisons faciles à vérifier on déduit des équations (4) les deux équations suivantes, où l'on a conservé les notations antérieures :

$$\begin{vmatrix} R_0 & S_0 & T_0 \\ R_1 & S_1 & T_1 \\ f'_z & \varphi'_z & \psi'_z \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} R_0 & S_0 & T_0 \\ R_1 & S_1 & T_1 \\ f'_t & \varphi'_t & \psi'_t \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui montre que C est, ainsi que J, située sur les deux surfaces cubiques représentées par ces équations et constitue, avec J, leur intersection. Si t est alors le nombre des points de rencontre de ces deux courbes, on a (SALMON, *Id.*, § 346) $t = 8$. Ainsi, les cubiques C, qui correspondent point par point à des droites, sont assujetties à huit conditions, puisqu'une cubique dépend de douze paramètres et une droite de quatre seulement. Ces conditions sont de rencontrer J huit fois.

Soit maintenant M un point de J; les plans polaires de M par rapport aux quadriques Q passent par une droite Δ. Il y a autant de droites Δ qui rencontrent une droite D prise arbitrairement que de points communs à J et à la cubique C qui correspond point par point à la droite D. Donc la surface S lieu des droites Δ est du huitième ordre.

Mais nous allons définir la surface S d'une façon plus précise en montrant que ce sont bien des droites Δ qui coupent J en trois points. Soient M un point de J et Δ la droite qui lui correspond. Le plan (M, Δ) coupe J en six points M, M', M'', M''', M$^{\text{iv}}$, M$^{\text{v}}$. Désignons par K le cône dont le sommet est un des six points et faisant partie du réseau. Le plan Π polaire de M par rapport au cône K passe par Δ. Il peut se présenter trois cas: 1° ou bien les plans Π et (M, Δ) sont distincts: soit K_1 un cône correspondant; 2° ou bien les deux plans sont confondus; soit K_2 un cône correspondant, le cône K_2 est alors tangent au plan (M, Δ) suivant la droite qui joint son sommet au point M; 3° ou bien un des plans est indéterminé, c'est le cas unique du cône de sommet M.

Or le plan (M, Δ) coupe les quadriques Q du réseau suivant des coniques formant un réseau ponctuel, et, comme le point M a même polaire, Δ, par rapport à toutes ces coniques, la courbe cayleyenne de ce réseau de coniques se décompose en le point M et une conique Σ; le réseau a deux droites doubles, les tangentes menées de M à Σ; donc il y a deux cônes K_2 tangents au plan (M, Δ) suivant ces deux droites. Il reste alors trois cônes K_1; les plans polaires de M par rapport à ces trois cônes coupent le plan (M, Δ) suivant Δ, c'est-à-dire que ces trois cônes ont leurs sommets sur Δ, et la droite Δ coupe bien J en trois points.

On peut d'après cela vérifier d'une autre façon que la surface S est bien du huitième ordre. On démontre en effet (Salmon, *Id.*, § 471) que, si une courbe d'ordre m a h points doubles apparents, l'ordre de la surface engendrée par une droite qui rencontre trois fois la courbe est

$$(m-2)h - \frac{1}{6}m(m-1)(m-2);$$

et ici $m=6$ et $h=7$.

On peut vérifier que toute section plane de S est bien de genre 3. En effet, la projection de J sur un plan, le point de vue étant un point de J est une quintique qui a $\frac{4.3}{2}-3=3$ points doubles, puisqu'elle est de genre 3. Donc par un point de J il passe trois droites Δ, c'est-à-dire que J est une courbe triple sur S; toute section plane de S admet donc six points triples, équivalents à dix-huit points doubles, et le genre de la section plane est $\frac{7\times 6}{2}-18=3$.

Cas particuliers intéressants. — I. Parmi les quadriques du réseau il y a un couple de plans. Alors l'intersection T des deux plans fait évidemment partie de J. Il reste une quintique gauche J. Prenons pour plans de coordonnées $x=0$ et $y=0$ les deux plans du couple; le Tableau (4) devient

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t \\ y & x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc J est l'intersection de la quadrique

$$\begin{vmatrix} f'_z & f'_t \\ \varphi'_z & \varphi'_t \end{vmatrix} = 0$$

avec la surface cubique

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

en écartant la solution étrangère $f'_z = \varphi'_z = 0$.

On voit aussi que la droite T, $x = y = 0$, est sur la surface cubique. Donc elle coupe J aux deux points où elle coupe la quadrique.

Si l'on fait $x = y = 0$ dans les équations d'une cubique C trouvées antérieurement, ces équations se réduisent à une seule,

$$\begin{vmatrix} zf'_{z_0} + tf'_{t_0} & zf'_{z_1} + tf'_{t_1} \\ z\varphi'_{z_0} + t\varphi'_{t_0} & z\varphi'_{z_1} + t\varphi'_{t_1} \end{vmatrix} = 0,$$

qui montre que la droite T est une corde de toutes ces cubiques, qui rencontrent en outre J en six points.

La courbe J est d'ordre $m = 5$; en conservant les notations antérieures on trouve (Salmon, *Id.*, § 345, 346) $h = 4$ et $r = 12$, et l'on en conclut que J est de genre 2.

Le plan polaire d'un point M de J par rapport au couple de plans du réseau passe par T ; donc toutes les droites Δ coupent T, et la surface S est le lieu des droites Δ qui coupent T en un point et J en deux points. Pour obtenir la surface totale du huitième ordre, il faudrait joindre, à la surface S précédente, la quadrique lieu des intersections des plans polaires des points de T par rapport aux quadriques du réseau; la surface S est donc du sixième ordre; nous la retrouverons d'ailleurs plus loin.

Si d'un point de T on projette la courbe J sur un plan, on obtient une quintique à $h = 4$ points doubles; mais l'un d'eux est sur T; il en reste trois autres: donc T est une droite triple de S. D'autre part, si par un point A de J et par T on fait passer un plan, il coupe J en cinq points, savoir: A, les deux points de T et deux autres points; donc J est une courbe de S. Le genre d'une section plane de S est donc

$$\frac{5.4}{2} - 3 - 5 = 2,$$

ce qui est bien le genre de J.

L'ordre de la surface engendrée par une droite rencontrant deux fois une courbe d'ordre m, ayant h points doubles apparents, et une fois une droite est (SALMON, *Id.*, § 470)

$$h + \frac{1}{2} m(m-1) = 4 + 10 = 14.$$

Mais ici il faut retrancher les deux cônes du quatrième ordre ayant J pour base commune et dont les sommets sont les points de rencontre de T avec J; l'ordre de s est $14 - 8 = 6$.

II. Parmi les quadriques du réseau se trouvent deux couples de plans. Soient T, T′ les droites d'intersection; prenons les quatre plans pour plans de coordonnées

$$x = 0,$$
$$y = 0$$

et

$$z = 0,$$
$$t = 0.$$

Les droites T, T′ font partie de la jacobienne, et il reste une quartique gauche dont les équations sont

$$\begin{vmatrix} f'_z & f'_t \\ t & z \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ y & x \end{vmatrix} = 0.$$

Les droites T, T′ coupent chacune J en deux points. Ce sont aussi des cordes communes à toutes les cubiques C qui rencontrent en outre J en quatre points.

Les droites Δ rencontrent J, T, T′ chacune en un point; la surface S qu'elles engendrent est du quatrième ordre et admet T, T′ comme droites doubles. Pour obtenir la surface totale du huitième ordre qui correspond à la jacobienne, il faut ajouter à la surface S les deux quadriques lieux des intersections des plans polaires des points de T et T′ par rapport aux quadriques du réseau.

III. Parmi les quadriques du réseau se trouvent trois couples de plans. Désignons par T_1, T_2, T_3 les trois droites d'intersection.

Ces trois droites font partie de la jacobienne et il reste une cubique gauche J; les droites T_1, T_2, T_3 coupent chacune J en deux points; ce sont aussi des cordes communes à toutes les cubiques C qui rencontrent en outre J en deux points. A la cubique J correspond la quadrique S lieu des droites Δ qui rencontrent T_1, T_2, T_3. Pour obtenir la surface totale du huitième ordre il faut ajouter à cette quadrique trois autres quadriques lieux des intersections des plans polaires des points de T_1, T_2, T_3 par rapport aux quadriques du réseau.

IV. Parmi les quadriques du réseau se trouvent quatre couples de plans P_1, P'_1, ..., P_2, P'_2, ..., P_3, P'_3, ..., P_4, P'_4. Désignons par $T_1, T_2. T_3, T_4$ les quatre droites d'intersection.

Les cubiques C ont pour cordes communes T_1, T_2, T_3, T_4.

Ces quatre droites font partie de la jacobienne et il reste une courbe du second ordre composée, comme nous allons voir, de deux droites conjuguées par rapport à toutes les quadriques du réseau. Soit, en effet, Δ_1 une droite qui rencontre les quatre droites T en A_1, A_2, A_3, A_4. Le point A_4 étant sur T_4, ses plans polaires par rapport aux trois couples P_1, P'_1, ..., $P_2 P'_2$, ..., $P_3 P'_3$, ... passent par une même droite, Δ_2; mais ces plans polaires restent les mêmes lorque A_4 varie sur Δ_1; donc Δ_1, Δ_2 sont conjuguées par rapport à toutes les quadriques du réseau.

Lorsqu'un point M variable décrit une des droites T_1, T_2, T_3, T_4, ses plans polaires passent par une droite Δ qui rencontre les trois autres engendrant une quadrique. Les quatre quadriques ainsi obtenues passent par Δ_1 et Δ_2.