NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TÊTU

Démonstration de quelques propriétés de l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 503-505

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__503_1>

[L'5e]

DÉMONSTRATION DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE;

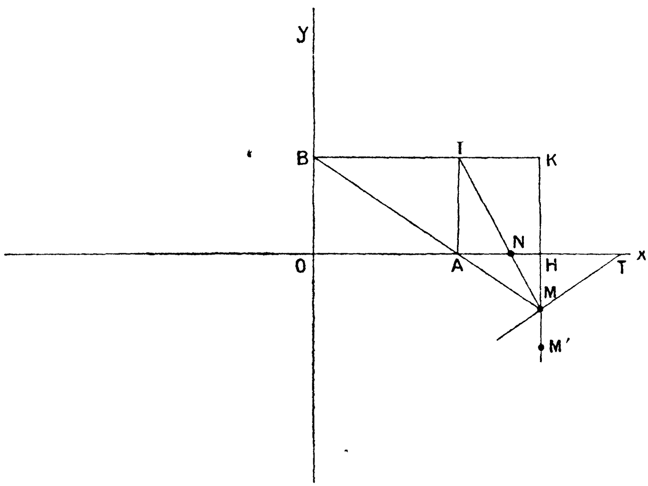
Par M. TÈTU.

Je vais démontrer que :

Une développée d'ellipse peut toujours se projeter orthogonalement suivant une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Considérons une droite dont deux points A et B décrivent deux droites rectangulaires Ox, Oy, et soit M un point de cette droite. Le lieu de M est une ellipse.

Fig. 1.



Construisons la normale et la tangente en M à l'aide du centre instantané de rotation I; soient INM et MT. Abaissons MH perpendiculaire sur Ox, et soit M' le point de MH tel que l'angle AM'T soit droit; on a

$$\mathrm{MH} = \sqrt{\mathrm{NH}.\mathrm{HT}}, \qquad \mathrm{M'H} = \sqrt{\mathrm{AH}.\mathrm{HT}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{HM'}} = \sqrt{\frac{\mathrm{NH}}{\mathrm{AH}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{KI}}{\mathrm{KB}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}} = \text{const.}$$

Si donc je projette la figure formée par ABM sur un plan parallèle à Ox et faisant avec le plan xOy un angle dont le cosinus soit $\sqrt{\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}}$, la droite AB se projettera suivant la normale à l'ellipse, projection du lieu de M. La propriété est donc démontrée.

En considérant les normales à l'ellipse comme projections d'une droite de longueur constante dont deux points décrivent deux droites rectangulaires, on démontre simplement un grand nombre de propriétés.

Par exemple, il est immédiat que *le rapport des segments interceptés sur une normale à une ellipse par les deux axes est constant.*

Considérons maintenant dans la figure précédente la parabole tangente à Ox, Oy, AB, MT: on reconnaît immédiatement que I en est le foyer et AB la tangente au sommet; cette parabole touche donc AB au pied P de la perpendiculaire abaissée de I sur cette droite. Or ce point est précisément le point de contact de AB avec son enveloppe.

Donc, par projection, on obtient la propriété connue :

La parabole tangente aux axes d'une ellipse, à la normale et à la tangente en un point M touche la normale au centre de courbure de l'ellipse au point M.

Mais remarquons que IP est l'axe de la parabole. Donc la projection de IP sera un diamètre de la parabole projetée. Ce diamètre sera perpendiculaire à la directrice, laquelle n'est autre que la projection de OM. On obtient donc la construction suivante du centre de courbure en un point M d'une ellipse :

Soit Q le point d'intersection des parallèles aux axes menées par les points où la normale en M coupe ces axes; le centre de courbure en M se trouve à l'intersection de la normale avec la perpendiculaire abaissée de Q sur OM.