Nouvelles annales de mathématiques

Egan

Note sur les courbes gauches

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 500-503

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__500_1>

[O'3k]

NOTE SUR LES COURBES GAUCHES;

Par M. EGAN.

Condition pour qu'une courbe donnée soit une hélice. — Pour une hélice sur un cylindre de forme quelconque dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z, on a

$$s = kz,$$

s étant la longueur de la courbe, mesurée à partir du point où elle rencontre le plan $z = 0$.

Pareillement, pour toute hélice, on a

$$s = ax + by + cz + d,$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

en désignant $\frac{d^r x}{ds^r}$ par x_r.

Si x, y, z sont données en fonction d'un paramètre t, on a

$$(2) \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & s_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & s_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & s_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

On vérifie facilement d'ailleurs que

$$\Delta' = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^{10} \Delta.$$

Réciproquement, si l'équation $\Delta = 0$ ou $\Delta' = 0$ est vérifiée, la courbe est une hélice. Considérons, en effet, x, y, z comme des fonctions données de t. La forme de l'équation $\Delta' = 0$ nous montre que toute fonction s de t qui lui satisfait doit être comprise sous la forme

$$s = ax - by + cz + d.$$

a, b, c, d étant des constantes. Donc la courbe est une hélice.

Expression géométrique de Δ. — Soient R, T les rayons de courbure et de torsion d'une courbe C à un point donné; ρ, τ les mêmes quantités pour le point correspondant de la courbe γ dont les coordonnées sont

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Alors on a, assez facilement,

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho^2 \tau} = R^6 \Delta.$$

On trouve aussi

$$\rho^{-1} = -T^{-1}\sqrt{R^2 + T^2},$$

$$\tau^{-1} = \frac{-R^3}{R^2+T^2}\frac{d}{ds}\frac{T}{R}.$$

On a donc

$$R^6 \Delta = -\frac{R^3}{T^2}\frac{d}{ds}\frac{T}{R}$$

$$= R\frac{d}{ds}\frac{R}{T},$$

$$\Delta = R^{-5}\frac{d}{ds}\frac{R}{T},$$

ce qui montre, comme on devait s'y attendre, que les conditions

$$\Delta = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{T} = \text{const.}$$

s'équivalent.

On peut donner une autre expression pour Δ comme il suit :

On rectifie la courbe C, on le sait, en développant la développable D dont l'élément plan contient la tangente et la binormale au point correspondant de C. Soient P, P′ deux points consécutifs sur C, et soit Q le point correspondant à P sur l'arête de rebroussement de D. Soit ψ l'angle entre PP′ et PQ. Alors

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{T}{R}.$$

L'angle ψ et l'angle PQP′ ne sont pas changés par le développement de D. Or, après ce développement, la courbe C devient une droite et l'on a, par conséquent,

$$PQP' = (\psi + d\psi) - \psi = d\psi.$$

On a donc

$$PP' \sin\psi = PQ \sin PQP' = PQ\, d\psi,$$

$$(4)\qquad PQ\frac{d\psi}{ds} = \sin\psi.$$

Soit maintenant p la perpendiculaire abaissée de Q sur PP'; on a

$$1 = p \,\text{coséc}^2\psi \frac{d\psi}{ds}$$

$$(5)\qquad = -p\frac{d}{ds}\frac{R}{T}.$$

On a donc

$$(6)\qquad \Delta = \frac{-1}{\rho^3 p}.$$

Si la développable D se réduit à un cône, on a $p =$ const. L'équation (5) nous montre donc que les courbes pour lesquelles on trouve

$$\frac{R}{T} = as + b$$

sont des géodésiques sur un cône.