NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DELTOUR

Continuants : applications à la théorie des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 49-69

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__49_0>

[I23a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES ;

PAR M. A. DELTOUR.

INTRODUCTION.

1. Les déterminants de la forme

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & . & . & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & . & . & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & . & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & . & . & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & a_{k-1} & b_{k-1} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & c_{k-1} & a_k \end{vmatrix}$$

sont connus sous le nom de *continuants* qui leur a été donné par M. Muir et ont été étudiés par plusieurs mathématiciens, notamment par Sylvester.

2. Cette dénomination se trouve justifiée par ce fait que, si l'on pose

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = \quad 1,$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = -1,$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont les quotients incomplets du développement en fraction continue d'une fraction dont le numérateur est le déterminant lui-même et dont le dénominateur est le déterminant mineur commençant par a_2.

On verra plus tard (n° 26) comment la forme du n° 1 se ramène à ce cas.

Le continuant peut alors être représenté plus simplement, suivant la notation d'Euler, par

$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_k).$$

Les développements correspondant aux premières valeurs de k sont

$$a_1, \quad a_1 a_2 + 1, \quad a_1 a_2 a_3 - \text{[illegible]} a_3, \ldots$$

3. Ces continuants particuli[illegible] dont il sera principalement question dans ce tra[illegible] propriétés nombreuses, dont plus[illegible] d'applications intéressantes à l[illegible] Quelques-unes d'entre elles [illegible] n'ai pas moins cru devoir en d[illegible] pour laisser à mon exposition [illegible] matique.

DÉFINITIONS ET [illegible]

4. 1° Les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k$ du [illegible] appelées *éléments* du continua[illegible]

2° Une *suite d'éléments* [illegible] lettre grecque.

Le continuant formé au [illegible] *suite donnée* sera désigné pa[illegible] sentant cette suite, enfermée [illegible] paren[illegible]

La même suite, privée de [illegible] à gauch[illegible] n termes à droite, sera désig[illegible] par la même [illegible] affectée des indices m et n.

Ainsi l'on posera

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, \ldots, a_k) &= (\alpha), \\
(b_1, b_2, \ldots, b_l) &= (\beta), \\
(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) &= (\alpha.\ \beta), \\
(a_2, \ldots, a_k) &= (\alpha_{(1,0)}), \\
(a_{m+1}, \ldots, a_{k-n}) &= (\alpha_{(m,n)}).
\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$(\alpha_{(0,0)}) = (\alpha).$$

On peut même supprimer les parenthèses lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre et écrire simplement

$$\alpha, \quad \alpha_{1,0}, \quad \alpha_{m,n},$$

au lieu de

$$(\alpha), \quad (\alpha_{(1,0)}), \quad (\alpha_{(m,n)}).$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ désignera *un continuant formé au moyen des éléments de l'ensemble des suites* α, β, γ, ...

3° Le *nombre des éléments* d'une suite α sera désigné par n_α.

4° *Valeur des symboles* $(\alpha_{m,n})$ *lorsque* $m + n \geqq n_\alpha$, *m et n prenant les valeurs* 0 *ou* 1. — Ces symboles, qui n'ont pas de sens par eux-mêmes, se présentent cependant dans les formules établies plus loin.

Pour trouver la signification qu'il convient de leur donner en vue de laisser aux formules toute leur généralité, il faut remarquer que, pour un continuant (α) composé d'un nombre quelconque d'éléments et mis sous forme de déterminant, on a

$$\begin{aligned}(0, \alpha) \quad &= (\alpha_{1,0}),\\ (\alpha, 0) \quad &= (\alpha_{0,1}),\\ (0, \alpha, 0) &= (\alpha_{1,1}),\end{aligned}$$

comme il est aisé de le vérifier à l'aide des propriétés des déterminants.

Ces égalités définiront les symboles des seconds membres, dans les cas où ces symboles n'ont pas de sens par eux-mêmes.

Si (α) se réduit à deux éléments, on a

$$(\alpha_{1,1}) = (0, a, b, 0) = (0, a) = 1.$$

Si (α) se réduit à un seul élément, on a

$$(\alpha_{1,0}) = (0, a) = 1, \qquad (\alpha_{0,1}) = (a, 0) = 1, \qquad (\alpha_{1,1}) = (0, a, 0) = 0.$$

Les démonstrations des formules données plus loin restent valables pour tous les cas en admettant les valeurs ainsi trouvées.

On verra plus loin (nº 11, *Remarque*) comment il est possible d'attribuer un sens au symbole $(\alpha_{m,n})$, quels que soient α, $m \geqq 0$, $n \geqq 0$.

5º La suite obtenue en *renversant* l'ordre des éléments d'une suite α sera désignée par $\underline{\alpha}$. Ainsi on écrira

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\alpha) \text{ ou } \alpha,$$
$$(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1) = (\underline{\alpha}) \text{ ou } \underline{\alpha}.$$

6º Une suite α, dont tous les éléments sont changés de signe, sera représentée par $-\alpha$.

7º La somme des deux continuants (α) et $(\alpha_{1,1})$ sera dite l'*adjoint* du continuant (α) et sera représentée par $((\alpha)$.

On posera donc

$$(\alpha) + (\alpha_{1,1}) = ((\alpha).$$

PREMIÈRE PARTIE.

FORMULES ALGÉBRIQUES.

FORMULE FONDAMENTALE. DÉVELOPPEMENT DES CONTINUANTS.

5. La formule fondamentale d'où résultent toutes les propriétés des continuants est la suivante :

$$\text{(I)} \qquad (\alpha, \beta) = (\alpha)(\beta) + (\alpha_{0,1})(\beta_{1,0}).$$

Pour la démontrer, considérons (α, β) sous sa forme de déterminant ; soit

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\alpha),$$
$$(b_1, b_2, \ldots, b_l) = (\beta).$$

On a

$$(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix}
a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
-1 & a_2 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot\cdot & \cdot & -1 & a_k & 1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & -1 & b_1 & 1 & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & 0 & -1 & b_2 & 1 & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & -1 & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & 1 \\
0 & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdot & -1 & b_l
\end{vmatrix}.$$

Formons avec les éléments des k premières colonnes un déterminant mineur D_a d'ordre k et avec ceux des l dernières le déterminant mineur D_b d'ordre l n'ayant aucune ligne commune avec le précédent. Faisons le produit $D_a D_b$.

On sait que le déterminant d'ordre $(k+l)$ est la somme algébrique de tous les produits possibles et distincts ainsi obtenus.

Or, dans un continuant tel que (α, β), ces produits seront nuls à moins que

D_a ne contienne les $(k-1)$ premières lignes,
D_b » $(l-1)$ dernières.

D_a et D_b seront complétés par l'une ou l'autre des lignes suivantes :

$$\overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & a_k \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 \end{matrix}}^{D_a.} \qquad \overbrace{\begin{matrix} b_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \ldots & 0 & 0 \end{matrix}}^{D_b.}$$

Tous les produits se réduisent donc à deux.

Le premier est

$$(\alpha)(\beta),$$

le second

$$(\alpha_{0,1})(\beta_{1,0}),$$

tous deux affectés du signe $+$.

On a, par exemple,

$$(a, b, c, d, e) = (a, b)(c, d, e) + (a)(d, e).$$

Si l'une des suites se réduit à un seul élément, on retrouve la formule de récurrence bien connue dans la théorie des fractions continues, écrite sous la forme

$$(a, \alpha) = a(\alpha) + (\alpha_{1,0}).$$

6. *Un continuant* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu)$ *peut être développé par la formule suivante :*

$$\text{(II)} \qquad (\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu) = \Sigma\,\alpha_{0,m}\,\beta_{m,n}\,\gamma_{n,p}\ldots\lambda_{u,v}\,\mu_{v,0},$$

dans laquelle le second membre est la somme des produits de continuants obtenus en donnant à m, n, p, $\ldots$, u, v *les valeurs* 0 *ou* 1 *de toutes les manières possibles.*

Pour un continuant composé seulement de deux suites, les relations (I) et (II) sont identiques.

Il suffit, par conséquent, de démontrer la proposition pour un continuant de N suites lorsqu'on la suppose établie dans le cas de N — 1 suites.

Or, on a, d'après (I),

$$(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu) = (\alpha, \beta, \ldots, \lambda)\mu + (\alpha, \beta, \ldots, \lambda_{0,1})\mu_{1,0}.$$

Les continuants $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda_{0,1})$ étant développés, tous les termes du second membre de cette égalité ont la forme de ceux compris sous le signe Σ dans (II), avec la valeur $v = 0$ pour ceux du premier produit et $v = 1$ pour ceux du second.

Les indices m, n, ..., u, v prennent les valeurs o ou 1 de toutes les manières possibles, puisqu'il en est ainsi par hypothèse pour m, n, ..., u.

Ce développement est donc identique à celui de (II).

Le *nombre des termes* est 2^{N-1}, car la série des valeurs o ou 1 données aux indices dans l'un d'eux peut être considérée comme représentant un nombre écrit dans le système binaire, et tous les nombres de o à $2^{N-1}-1$ se trouvent ainsi représentés une seule fois dans le développement.

En appliquant, par exemple, la relation (II) à un continuant composé de quatre suites, on trouve

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha\beta\gamma\delta &+ \alpha_{0,1}\beta_{1,0}\gamma\delta + \alpha_{0,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,0}\delta + \alpha_{0,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,1}\delta_{1,0} \\ &+ \alpha\beta_{0,1}\gamma_{1,0}\delta + \alpha_{0,1}\beta_{1,0}\gamma_{0,1}\delta_{1,0} \\ &+ \alpha\beta\gamma_{0,1}\delta_{1,0} + \alpha\beta_{0,1}\gamma_{1,1}\delta_{1,0},\end{aligned}$$

puis, chacune de ces suites étant réduite à un seul élément,

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) = abcd &+ cd \\ &+ ad + 1 \\ &+ ab.\end{aligned}$$

Remarques. — 1° Dans le cas où chaque suite α se réduit à un seul élément, on a $(\alpha_{1,1}) = 0$ et le nombre des termes du développement est alors donné par la série de Lamé :

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad \ldots, \quad u_k, \quad \ldots,$$

telle que $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$.

Ces nombres donnent aussi les valeurs des continuants, dans lesquels on a

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 1.$$

2° Le nombre des facteurs dans chaque terme est de même parité que le nombre des éléments.

Si ce nombre est pair, le continuant ne change pas de valeur lorsqu'on change les signes de tous ses éléments. Il change de signe dans le cas contraire.

7. *Autre formule de développement par rapport à certains éléments.* — Soit un continuant

$$(\alpha_1, b_1, \alpha_2, b_2, \ldots, \alpha_k, b_k, \alpha_{k+1})$$

comprenant les k éléments b_1, b_2, ... par rapport auxquels on veut le développer.

On a la relation suivante :

$$\text{(III)} \qquad (\alpha_1, b_1, \alpha_2, b_2, \ldots, \alpha_k, b_k, \alpha_{k+1}) = \Sigma\, B_h A_h,$$

dans laquelle

B_h est le produit de h éléments quelconques de la série b_1, b_2, ..., b_k, soit $B_h = b_{m_1} b_{m_2} \ldots b_{m_h}$;

A_h le produit des continuants formés chacun d'une suite des autres éléments du continuant donné, soit antérieure à b_{m_1}, soit comprise entre deux éléments successifs appartenant à B_h, soit postérieure à b_{m_h}, et où l'on remplace par o les autres termes de la série b_1, b_2, ..., b_k.

Par convention, on fait $B_0 = 1$.

Le signe Σ s'applique à toutes les valeurs de h variant de o à k et, pour chacune d'elles, à toutes les combinaisons distinctes de h éléments qu'on peut former avec b_1, b_2, ..., b_k.

Pour le démontrer, faisons d'abord $k = 1$. On a, d'après (II),

$$\begin{aligned}(\alpha_1, b_1, \alpha_2) &= \alpha_1 b_1 \alpha_2 + \alpha_{1\,(0,1)} \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_{2\,(1,0)} \\ &= b_1 \alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1, 0, \alpha_2).\end{aligned}$$

Supposons la proposition démontrée pour $k - 1$ éléments; on a, en appliquant la formule précédente,

$$(\alpha_1, b_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, b_k, \alpha_{k+1}) = b_k(\alpha_1, b_1, \ldots, \alpha_{k-1}, b_{k-1}, \alpha_k)\alpha_{k+1} + (\alpha_1, b_1, \ldots, \alpha_k, 0, \alpha_{k+1}).$$

Le développement du premier terme du second membre donne tous les termes de (III) contenus sous le signe Σ qui se composent avec b_k, et celui du second donne tous les termes qui en sont indépendants : ce qui démontre la proposition.

Par exemple, pour $k = 4$, on a

$$\begin{aligned}(\alpha_1, b_1, \alpha_2, b_2, \alpha_3, b_3, \alpha_4, b_4, \alpha_5) = {} & b_1 b_2 b_3 b_4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \\ & + b_1 b_2 b_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_4, 0, \alpha_5) \\ & + b_1 b_2 b_4 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3, 0, \alpha_4) \alpha_5 \\ & + b_1 b_3 b_4 \alpha_1 (\alpha_2, 0, \alpha_3) \alpha_4 \alpha_5 \\ & + b_2 b_3 b_4 (\alpha_1, 0, \alpha_2) \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \\ & + b_1 b_2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3, 0, \alpha_4, 0, \alpha_5) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & + (\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \alpha_3, 0, \alpha_4, 0, \alpha_5).\end{aligned}$$

FORMULES DE TRANSFORMATION.

8. Les propositions qui vont suivre ont pour objet les transformations d'un continuant qui n'altèrent pas sa valeur.

Ces transformations sont, d'une manière générale, de deux sortes :

1° Introduction de suites nouvelles entre deux éléments quelconques du continuant;

2° Transformation des éléments eux-mêmes ou de suites d'éléments.

9. *Définition et propriétés des suites* θ, θ', η, η'. — On désignera par θ, θ', η, η' des suites α particulières pour lesquelles les valeurs de (α), $(\alpha_{1,1})$, $(\alpha_{0,1})$, $(\alpha_{1,0})$

sont :

	(α).	$(\alpha_{1,1})$.	$(\alpha_{0,1})$.	$(\alpha_{1,0})$.
Pour (θ).........	1	1	0	0
Pour (η)........	1	-1	0	0
Pour (θ').........	-1	-1	0	0
Pour (η')........	-1	1	0	0

En voici des exemples :

Type (θ)... $(0, 0), (2, -1, 4, -1, 2, -2), (1, -3, 1, -3, 1, -3)$
Type (η).. $(1, -1, 1), (0, -1, 1, -1, 0), (-1, 3, -1, 2, -2)$
Type (θ').. $(1, -2, 1, -2), (4, -1, 2, -2, 3, -2, 1, -3)$
Type (η').. $(-1, 1, -1), (0, 1, -1, 1, 0), (1, -3, 1, -2, 2)$

10. *Une suite formée par la réunion de deux suites dont chacune appartient à l'un des types* θ, θ', η *ou* η', *en conservant l'ordre des éléments, appartient encore à l'un de ces mêmes types.*

Soient, par exemple, λ et μ deux de ces suites; on a, d'après I,

$$(\mathrm{T}_1)\quad \begin{cases} (\lambda, \mu) \quad = (\lambda)(\mu), & (\lambda, \mu_{0,1}) = 0, \\ (\lambda_{1,0}, \mu_{0,1}) = (\lambda_{1,1})(\mu_{1,1}), & (\lambda_{1,0}, \mu) = 0; \end{cases}$$

ce qui démontre la proposition.

En particulier, si λ et μ appartiennent au même type, leur réunion forme une suite θ.

11. Le développement d'un continuant (α, λ, β), où λ est une suite θ, θ', η ou η', donne

$$(\mathrm{T}_2)\qquad (\alpha, \lambda, \beta) = \lambda\alpha\beta + \lambda_{1,1}\alpha_{0,1}\beta_{1,0}.$$

De cette relation, où λ et $\lambda_{1,1}$ ont les valeurs ± 1, résultent plusieurs conséquences :

1° *La valeur d'un continuant tel que* (α, λ, β) *ne* *change pas lorsqu'on substitue à* λ *une autre suite appartenant au même*

2° *Le continuant change de signe si l'on y remplace un* θ *ou un* η *respectivement par un* θ' *ou un* η', *et* vice versa.

On n'aura plus dès lors à considérer, en général, que les types θ et η, et dans ceux-ci les suites les plus simples, $(0, 0)$ et $(0, -1, 1, -1, 0)$.

3° *Un continuant ne change pas de valeur lorsqu'on introduit un* θ *entre deux quelconques de ses éléments.*

Sa valeur absolue ne change pas lorsqu'on introduit un η *en changeant les signes de tous les éléments qui le précèdent ou qui le suivent.*

Car (T_2) devient, pour θ,

$$(T_3) \qquad (\alpha, \theta, \beta) = (\alpha, \beta)$$

et, pour η,

$$(T_4) \qquad (\alpha, \eta, \beta) = (-1)^{n_\beta}(\alpha, -\beta).$$

Remarque. — La formule (T_3) permet de donner aux symboles $(\alpha_{m,n})$, lorsque $m + n \geqq n_\alpha$, une signification précise. Car on peut introduire entre les éléments autant de fois $(0, 0)$ qu'il est nécessaire pour que n_α devienne plus grand que $m + n$.

Le résultat sera $(0) = 0$ si $n_\alpha - (m + n)$ est impair et $(0, 0) = 1$ s'il est pair.

Ainsi $(\alpha_{2,3})$, où α ne contient que deux éléments, devient $(a, 0, 0, 0, 0, b)$ privé de deux éléments à gauche et de trois à droite, c'est-à-dire (0).

12. *Généralisation de la formule* (T_4). — On a

$$(T_5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \eta, -\beta_1, \eta, \alpha_2, \eta, -\beta_2, \eta, \ldots, \eta, -\beta_h, \eta, \alpha_{h+1}) \\ \qquad = (-1)^{n_{\beta_1} + n_{\beta_2} + \ldots + n_{\beta_h}}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \beta_h, \alpha_{h+1}). \end{array} \right.$$

La formule sera démontrée si elle l'est pour $h = 1$. On a, d'après (T_4),

$$(\alpha_1, \eta, -\beta_1, \eta, \alpha_2) = (-1)^{n_{\alpha_2}}(\alpha_1, \eta, -\beta_1, -\alpha_2),$$

puis

$$(\alpha_1, \eta, -\beta_1, -\alpha_2) = (-1)^{n_{\beta_1}+n_{\alpha_2}}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2),$$

d'où

$$(\alpha_1, \eta, -\beta_1, \eta, \alpha_2) = (-1)^{n_{\beta_1}}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2).$$

Les suites β peuvent d'ailleurs se réduire à un seul élément, d'où cette conséquence :

On peut, au moyen de l'introduction de suites η, modifier à volonté les signes des éléments d'un continuant.

Voici quelques applications particulières de cette formule :

$$(T_6) \qquad \begin{cases} (\alpha, \eta) & = \quad (\alpha), \\ (\alpha, \eta_{0,1}) & = -(\alpha_{0,1}), \\ (\alpha, \eta, 0, \beta) & = -(\alpha, 0, \eta, \beta). \end{cases}$$

13. Les transformations de la deuxième catégorie portent, comme je l'ai dit, sur les éléments eux-mêmes. Je vais indiquer successivement plusieurs de ces transformations qui sont particulièrement importantes :

1° *On peut, sans changer la valeur d'un continuant, renverser l'ordre de ses éléments et écrire*

$$(T_7) \qquad (\alpha) = (\underline{\alpha}).$$

Cela résulte immédiatement des propriétés des déterminants.

14. 2° On a vu (n° 11, 1°) que, dans un continuant, certaines suites θ ou η sont équivalentes, c'est-

à-dire qu'elles peuvent se substituer l'une à l'autre sans que la valeur du continuant soit modifiée.

Pour trouver d'une façon générale les suites équivalentes, désignons par λ et μ deux de ces suites; on a

$$(\alpha, \lambda, \beta) = \alpha\lambda\beta + \alpha_{0,1}\lambda_{1,0}\beta + \alpha_{0,1}\lambda_{1,1}\beta_{1,0} + \alpha\lambda_{0,1}\beta_{1,0}.$$

De même,

$$(\alpha, \mu, \beta) = \alpha\mu\beta + \alpha_{0,1}\mu_{1,0}\beta + \alpha_{0,1}\mu_{1,1}\beta_{1,0} + \alpha\mu_{0,1}\beta_{1,0}.$$

Les conditions à remplir sont donc

$$\lambda = \mu, \qquad \lambda_{1,0} = \mu_{1,0},$$
$$\lambda_{1,1} = \mu_{1,1}, \qquad \lambda_{0,1} = \mu_{0,1}.$$

En général, on peut satisfaire à ces conditions avec deux suites distinctes λ et μ si l'on dispose d'un nombre suffisant d'éléments. Mais on se bornera ici à considérer une solution qui sera utile dans les applications et qui est la suivante :

$$\lambda = (a), \qquad \mu = (b, 0, c),$$

avec la condition $a = b + c$.

On vérifie, en effet, immédiatement que les conditions écrites plus haut sont satisfaites.

Ainsi,

$$(\mathrm{T}_8) \qquad (\alpha, a, \beta) = (\alpha, b, 0, c, \beta).$$

15. 3° Des propriétés des déterminants on déduit encore les formules suivantes, qui se rapportent à des *continuants dont le premier élément est* ± 1 :

$$(\mathrm{T}_9) \qquad \begin{cases} (1, a_2, \alpha) = (a_2 + 1, \alpha), \\ (-1, a_2, \alpha) = -(a_2 - 1, \alpha). \end{cases}$$

L'application de la relation (I) donne d'ailleurs

$$
\begin{aligned}
(1, a_2, \alpha) &= (1, a_2)\alpha + \alpha_{1,0} \\
&= (a_2+1)\alpha + \alpha_{1,0} \\
&= (a_2+1, \alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1, a_2, \alpha) &= (-1, a_2)\alpha - \alpha_{1,0} \\
&= -(a_2-1)\alpha - \alpha_{1,0} \\
&= -(a_2-1, \alpha).
\end{aligned}
$$

Remarque. — On a des formules analogues dans le cas où le dernier élément du continuant est ± 1.

16. 4° Le procédé de transformation suivant fait intervenir un facteur étranger.

Si (α, β), (α', β') *sont deux continuants satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$
(\mathrm{T}_{10}) \quad
\left\{
\begin{aligned}
(\alpha) \quad &= (\alpha'), \\
t(\alpha_{1,0}) &= (\alpha'_{1,0}), \\
\frac{1}{t}(\alpha_{0,1}) &= (\alpha'_{0,1}), \\
(\alpha_{1,1}) &= (\alpha'_{1,1}),
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
(\beta) \quad &= (\beta'), \\
t(\beta_{1,0}) &= (\beta'_{1,0}), \\
\frac{1}{t}(\beta_{0,1}) &= (\beta'_{0,1}), \\
(\beta_{1,1}) &= (\beta'_{1,1}),
\end{aligned}
\right.
$$

t étant un certain nombre, on a aussi

$$
\left\{
\begin{aligned}
(\alpha, \beta) \quad &= (\alpha', \beta'), \\
t(\alpha_{1,0}, \beta) &= (\alpha'_{1,0}, \beta'), \\
\frac{1}{t}(\alpha, \beta_{0,1}) &= (\alpha', \beta'_{0,1}), \\
(\alpha_{1,0}, \beta_{0,1}) &= (\alpha'_{1,0}, \beta'_{0,1}).
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifie ces relations en remplaçant les α par leurs valeurs en fonction des α' dans les développements des (α, β). Le calcul ne présente pas de difficulté.

On arrive à la même conclusion pour deux continuants (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ composés chacun de trois suites; si les continuants correspondants (α) et (α'), (β) et (β'), (γ) et (γ') satisfont aux conditions (T_{10}), on a aussi

$$\left\{\begin{aligned} &(\alpha, \beta, \gamma) &&= (\alpha', \beta', \gamma'),\\ &t(\alpha_{1,0}, \beta, \gamma) &&= (\alpha'_{1,0}, \beta', \gamma'),\\ &\frac{1}{t}(\alpha, \beta, \gamma_{0,1}) &&= (\alpha', \beta', \gamma'_{0,1}),\\ &(\alpha_{1,0}, \beta, \gamma_{0,1}) &&= (\alpha'_{1,0}, \beta', \gamma'_{0,1}).\end{aligned}\right.$$

En effet, désignons par ρ l'ensemble des éléments de (α, β) et de même par ρ' celui des éléments de (α', β').

Les continuants (ρ) et (ρ') satisfont à (T_{10}) comme on vient de le voir.

(γ) et (γ') y satisfont aussi par hypothèse. Donc aussi (ρ, γ) et (ρ', γ').

On a, par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned} &(\rho, \gamma) &&= (\rho', \gamma'),\\ &t(\rho_{1,0}, \gamma) &&= (\rho'_{1,0}, \gamma'),\\ &\frac{1}{t}(\rho, \gamma_{0,1}) &&= (\rho', \gamma'_{0,1}),\\ &(\rho_{1,0}, \gamma_{0,1}) &&= (\rho'_{1,0}, \gamma'_{0,1}).\end{aligned}\right.$$

En remplaçant ρ par α, β et ρ' par α', β' dans ces dernières égalités, on retrouve les précédentes.

La proposition peut s'étendre de la même façon à deux continuants composés d'un nombre quelconque de suites.

Remarque. — Un certain nombre de suites peuvent se réduire à deux éléments.

Par exemple, les deux continuants

$$(a, b, c, d), \quad (a', b', c', d'),$$

tels que

$$a' = \frac{a}{t}, \qquad b' = bt, \qquad c' = \frac{c}{t}, \qquad d' = dt,$$

peuvent être considérés comme étant de la forme (α, β) et (α', β') en posant

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha) &= (a, b), \\ (\beta) &= (c, d), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} (\alpha') &= (a', b'), \\ (\beta') &= (c', d'). \end{aligned}\right.$$

Les conditions (T_{10}) sont satisfaites par

$$(\alpha) \ \text{et} \ (\alpha'), \qquad (\beta) \ \text{et} \ (\beta'),$$

donc aussi par les deux continuants

$$(\alpha, \beta) \ \text{et} \ (\alpha', \beta').$$

On a ainsi, en particulier,

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d').$$

GÉNÉRALISATION DE LA RELATION (I).

17. *Entre quatre suites quelconques* α, β, γ, δ, *on a la relation*

$$(\mathrm{IV})\left\{\begin{aligned} &(\alpha, \eta, 0, \underline{\beta})(\gamma, \eta, 0, \underline{\delta}) + (\alpha, \eta, 0, \underline{\gamma})(\delta, \eta, 0, \underline{\beta}) \\ &\qquad + (\alpha, \eta, 0, \underline{\delta})(\beta, \eta, 0, \underline{\gamma}) = 0. \end{aligned}\right.$$

En effet, si l'on divise chacun des termes du trinome qui forme le premier membre par le produit

$$(\alpha_{0,1})(\beta_{0,1})(\gamma_{0,1})(\delta_{0,1})$$

après avoir mis chaque continuant tel que $(\alpha, \eta, 0, \underline{\beta})$ sous la forme $(\alpha)(\beta_{0,1}) - (\alpha_{0,1})(\beta)$ et si l'on pose

$$x = \frac{\alpha}{\alpha_{0,1}}, \qquad y = \frac{\beta}{\beta_{0,1}}, \qquad z = \frac{\gamma}{\gamma_{0,1}}, \qquad t = \frac{\delta}{\delta_{0,1}},$$

cette formule se ramène à l'identité

$$(x - y)(z - t) + (x - z)(t - y) + (x - t)(y - z) = 0.$$

18. La formule (IV) devient

(V) $\quad (\alpha, \beta, \gamma)(\beta) - (\alpha, \beta)(\beta, \gamma) = (-1)^{n_\beta}(\alpha_{0,1}, \gamma_{1,0}),$

lorsqu'on y remplace

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{o}\underline{\beta}) & \text{par} & (\eta\beta\gamma'), \\ (\mathrm{o}\underline{\gamma}) & \text{»} & (\eta\beta'), \\ (\delta) & \text{»} & (\eta), \end{array}$$

puis

$$\beta', \gamma' \quad \text{par} \quad \beta, \gamma,$$

et en éliminant η par application des propriétés de ces suites.

Remarque. — En faisant évanouir β et faisant $n_\beta = 0$, on retrouve la relation (I).

19. Si α et γ se réduisent chacun à un seul terme, a et c, on a

$$(a, \beta, c)(\beta) - (a, \beta)(\beta, c) = (-1)^{n_\beta},$$

qu'on peut écrire sous forme de relation entre les quatre quantités α, $\alpha_{0,1}$, $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$:

(VI) $\quad (\alpha)(\alpha_{1,1}) - (\alpha_{0,1})(\alpha_{1,0}) = (-1)^{n_\alpha}.$

Cette importante relation, qui sert dans la théorie des nombres à résoudre l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues, peut être vérifiée directement en remarquant que le premier membre est le continuant $(\alpha, \eta, 0, \underline{\alpha}, 0)$, dont la valeur est $(-1)^{n_\alpha}(\alpha, 0, -\underline{\alpha}, 0)$ et se réduit à $(-1)^{n_\alpha}$.

Conséquence. — Si α est une suite θ ou θ', le premier membre de (VI) devient 1 ; donc le nombre des éléments de θ ou de θ' doit être pair.

Il est impair dans η ou η'.

ADJOINT D'UN CONTINUANT.

20. *Un adjoint reste invariable pour toute permutation circulaire de ses éléments, c'est-à-dire qu'on a*

$$(\mathrm{A}_1) \qquad ((a,\ \alpha) = ((\alpha,\ a).$$

En effet,

$$((a,\ \alpha) = (a,\ \alpha) + (\alpha_{0,1}) = a\alpha + \alpha_{1,0} + \alpha_{0,1},$$
$$((\alpha,\ a) = (\alpha,\ a) + (\alpha_{1,0}) = a\alpha + \alpha_{0,1} + \alpha_{1,0}.$$

21. *On peut appliquer aux adjoints, sans changer leur valeur, les procédés de transformation qui laissent invariables les valeurs des deux parties* (α) et $(\alpha_{1,1})$, *savoir :*

1° Introduction de suites du type θ entre deux éléments (n° 11);

2° Renversement de l'ordre des éléments (n° 13);

3° Équivalence de (a) et de $(b,\ 0,\ c)$ lorsqu'on a $a = b + c$ (n° 14);

4° Transformation au moyen d'un facteur t (n° 16).

22. *L'introduction de* η *à la suite des éléments de* $((\alpha)$ *donne un adjoint* $((\alpha,\ \eta)$ *ayant pour valeur* $(\alpha) - (\alpha_{1,1})$.

En effet, on a

$$(\alpha,\ \eta) \quad = (\alpha),$$
$$(\alpha_{1,0},\ \eta_{0,1}) = -(\alpha_{1,1}).$$

On obtiendra la valeur d'un adjoint tel que $((\alpha,\ \eta,\ \beta)$, résultant de l'introduction de η entre deux éléments quelconques d'un adjoint $((\alpha,\ \beta)$, en le mettant sous la forme $((\beta, \alpha, \eta)$ par permutation circulaire de ses éléments.

On a

$$(A_2) \qquad ((\alpha, \eta, \beta) = (\beta, \alpha) - (\beta_{1,0}, \alpha_{0,1}).$$

APPLICATION AUX CONTINUANTS FORMÉS DE SUITES $\theta, \theta', \eta, \eta'$.

23. *Par permutation circulaire des éléments d'une suite appartenant à l'un des types* θ, θ', *on obtient encore une suite de même type.*

Soit en effet λ une suite de l'un des types θ ou θ', et posons

$$(\lambda) = (a, \alpha).$$

Posons aussi

$$(\alpha, a) = (\mu).$$

Puisqu'on a par hypothèse

$$(\alpha) = (\lambda_{1,0}) = 0,$$

les formules du n° 20 montrent que

$$\begin{aligned}(\alpha_{1,0}) &= (\lambda) &&= (\mu_{1,1}),\\ (\alpha_{0,1}) &= (\lambda_{1,1}) &&= (\mu).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases}(\mu_{0,1}) = (\alpha) = 0,\\ (\mu_{1,0}) = (\alpha_{1,0}, a) = a(\alpha_{1,0}) + (\alpha_{1,1}) = a(\lambda) + (\alpha_{1,1})\end{cases}$$

et

$$(\lambda_{0,1}) = (a, \alpha_{0,1}) = a(\alpha_{0,1}) + (\alpha_{1,1}) = a(\lambda_{1,1}) + (\alpha_{1,1}) = 0.$$

Comparant les deux dernières égalités, on trouve

$$(\mu_{1,0}) = a[(\lambda) - (\lambda_{1,1})].$$

Le second membre devient nul si λ est une suite θ ou θ'; μ appartient donc au même type que λ.

Dans ce cas, la valeur de l'adjoint est toujours ± 2.

24. Les suites η ou η' jouissent d'une propriété analogue, lorsqu'en faisant la permutation circulaire on donne à l'élément a des signes contraires dans λ et dans μ; on posera

$$(\lambda) = (a, \alpha),$$
$$(\mu) = (\alpha, -a).$$

Les formules du n° 23 sont entièrement applicables à ce cas moyennant le changement de signe de a dans (μ).

On trouve ainsi :

$$\begin{cases} (\mu_{1,1}) = (\lambda), \\ (\mu) \quad = (\lambda_{1,1}), \end{cases} \qquad \begin{cases} (\mu_{0,1}) = 0, \\ (\mu_{1,0}) = -\ a[(\lambda) + (\lambda_{1,1})]. \end{cases}$$

$(\mu_{1,0})$ devient nul si λ est une suite η ou η'.

μ appartient donc au type η' si λ est un η et inversement.

La valeur des adjoints successifs est 0.

Si l'on appelle *permutation circulaire alternée* une permutation circulaire dans laquelle chaque élément change de signe en changeant de côté, on peut énoncer la proposition suivante :

Par permutation circulaire alternée des éléments d'une suite appartenant à l'un des types η, η', on obtient encore une suite appartenant respectivement à l'un des types η', η.

Par exemple,

$$(-1, 3, -1, 2, -2)$$

étant un (η), les continuants

$$\begin{array}{l}
(3, -1, 2, -2, 1),\\
(-1, 2, -2, 1, -3),\\
(2, -2, 1, -3, 1),\\
(-2, 1, -3, 1, -2)
\end{array}$$

appartiennent alternativement aux types (η), (η').

(*A suivre.*)