Questions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 478-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__478_0>

QUESTIONS.

2099. Si l'on considère les trois équations

$$(1) \qquad \frac{a}{b-x} + \frac{b}{x-a} + \frac{x}{a-b} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{a}{(b-x)^2} + \frac{b}{(x-a)^2} + \frac{x}{(a-b)^2} = 0,$$

$$(3) \qquad \sqrt[3]{x-a} + \sqrt[3]{b-x} = \sqrt[3]{b-a},$$

l'équation (2) du cinquième degré contient les trois racines de l'équation (1).

Les deux autres racines de (2) sont racines doubles de l'équation (3) qui a six racines. (E.-N. BARISIEN.)

2100. Si a et b sont les racines de l'équation

$$x^2 - 7x + 7^3 = 0,$$

les deux quantités

$$-2(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) - (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}),$$
$$-(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) - (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})$$

sont égales à celles-ci,

$$3(\varepsilon\sqrt[3]{a} + \varepsilon^2\sqrt[3]{b}), \quad 3(\varepsilon^2\sqrt[3]{a} + \varepsilon\sqrt[3]{b}),$$

ε et ε^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité. Préciser ε. G. F.

(D'après HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.*)

2101. La quintique gauche qui est l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface de troisième ordre ayant une droite commune dépend de 20 paramètres. G. F.

2102. On considère un limaçon de Pascal et les cercles bitangents n'ayant pas leurs centres sur l'axe de symétrie :

1° La corde des contacts passe par un point fixe;

2° Enveloppe de la polaire de ce point par rapport à un cercle bitangent;

3° Lieu du pôle de la corde des contacts par rapport à un cercle bitangent;

4° Lieu du milieu de cette corde:

5° Lieu du conjugué harmonique de P par rapport aux points de contact du cercle avec le limaçon. (M. Tétu.)

2103. Étant données 4 sphères C_1, C_2, C_3, C_4 de centres O_1, O_2, O_3, O_4, une sphère quelconque Σ coupe les axes radicaux IA_1, IA_2, IA_3, IA_4 de ces sphères prises 3 à 3 en A_1 et A'_1, A_2 et A'_2, A_3 et A'_3, A_4 et A'_4. Les 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 sont les centres radicaux de C_1, C_2, C_3, C_4 prises 3 à 3 avec une sphère S. De même A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 sont les centres radicaux de C_1, C_2, C_3, C_4 prises 3 à 3 avec une sphère S'.

1° Montrer que S et S' peuvent se déduire l'une de l'autre de la façon suivante : leurs centres ω, ω' sont deux points inverses par rapport au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ et la somme des puissances du point I par rapport à ces deux sphères reste constante quand Σ varie.

2° Montrer qu'il y a une surface lieu des points ω, ω' tels que S et S' soient orthogonales quel que soit le rayon arbitraire attribué à l'une d'elles, et étudier cette surface.

(R. Gilbert.)

2104. Étant donnée une ellipse de demi-axes R et 2R, le cercle ayant pour diamètre une demi-corde parallèle au grand axe enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements.

(E.-N. Barisien.)

2105. Les tangentes en trois points A, B, C d'une parabole de foyer F forment un triangle $A'B'C'$. Démontrer les relations

$$FA.\overline{FA'}^2 = FB.\overline{FB'}^2 = FC.\overline{FC'}^2$$
$$FA.FB.FC = FA'.FB'.FC'.$$

(E.-N. Barisien.)

2106. Si l'on considère les paraboles qui sont tangentes en O à une droite OT et qui ont la corde normale OA fixe : 1° le lieu du foyer de ces paraboles est une cissoïde droite ; 2° la directrice enveloppe une parabole. (E.-N. BARISIEN.)

2107. On donne une parabole P et une tangente fixe T à P. Le lieu du foyer des paraboles Q qui ont T pour tangente au sommet et qui sont tangentes à P est une parabole R, tangente aussi à T, ayant même foyer que P et dont l'axe est perpendiculaire à celui de P. (E.-N. BARISIEN.)

2108. On donne le triangle ABC et le centre O de son cercle circonscrit. On prend les symétriques A', B' de O par rapport aux côtés issus de C : le cercle A'CB' et les cercles analogues pour les sommets A, B se coupent en un même point du cercle ABC. (CANON.)

2109. Du point où le cercle inscrit à un triangle donné touche un des côtés on abaisse une perpendiculaire sur la droite qui joint le milieu de ce côté au centre du cercle. Elle rencontre la hauteur issue du sommet opposé à ce côté en un point dont la distance au milieu du segment compris entre ce sommet et l'orthocentre du triangle est égale au rayon du cercle circonscrit au triangle donné. (CANON.)

2110. Soit sur une ellipse un point M d'où l'on peut mener à la courbe les normales MA, MB, MC. Soit γ le point de rencontre de AB et de la parallèle menée de M à la tangente au point C. On a de même sur AC, BC les points β, α. Les points α, β, γ sont sur une droite parallèle à la tangente au point M à l'ellipse. (CANON.)

2111. On donne quatre plans. On mène une droite D que les quatre plans partagent en segments proportionnels à des segments donnés. Par les points où D rencontre les plans on leur élève des perpendiculaires et l'on construit la seconde droite Δ qui rencontre ces perpendiculaires. Le plan mené par D parallèlement à Δ est parallèle à une même droite quelle que soit la position de D. [A. MANNHEIM (1).]

---

(1) Question retrouvée dans les papiers laissés par le célèbre géomètre.