NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission à l'École normale supérieure et aux bourses de licence en 1908. Composition de mathématiques (Sciences I et II)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 456-473

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__456_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1908.

Composition de Mathématiques (Sciences I et II).

PREMIÈRE QUESTION.

1° *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

où n désigne un entier positif.

2° *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$I = \int_0^\infty \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(1+x^2)^3} dx.$$

DEUXIÈME QUESTION.

1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1) \qquad y'' + a^2 y = \sin x,$$

où a désigne une constante positive, différente de un.

2° *Déterminer une intégrale particulière de l'équation précédente par la condition que cette intégrale et sa dérivée première s'annulent pour* $x = 0$.

3° *Rechercher ce que devient cette intégrale particulière lorsque* a *tend vers* un *et en déduire l'intégration de l'équation* (1) *dans le cas particulier où* $a = 1$.

TROISIÈME QUESTION.

On donne trois axes rectangulaires $Oxyz$ *et le parallélépipède rectangle* (P) *dont les six faces ont pour équations*

$$x = \pm 6, \qquad y = \pm 11, \qquad z = \pm 16.$$

Une sphère solide (S), *de rayon* 1, *se meut à l'intérieur de* (P). *Le mouvement du centre de* (S) *est rectiligne et uniforme tant que la surface de* (S) *ne vient pas en contact avec une face de* (P); *lorsqu'un tel contact se produit, la vitesse de ce centre conserve la même valeur absolue, mais sa direction se modifie suivant la loi physique de la réflexion, c'est-à-dire que la normale commune aux surfaces en contact est l'une des bissectrices de l'angle formé par les deux vitesses du centre, avant et après le contact.*

A l'époque $t = 0$, *le centre de* (S) *est l'origine des coordonnées. Les projections de sa vitesse sur les axes sont alors respectivement égales à* 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

On demande :

1° *Les coordonnées* x, y, z *de ce centre à l'époque* $t = 10$;

2° *La coordonnée* z *à l'époque* $t = 1000$.

On calculera les résultats à un centième près.

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

PREMIÈRE QUESTION.

1° Le calcul de I_n est une question classique.

On a

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)^n}\,dx = I_{n-1} - \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1 - x^2)^n}.$$

En intégrant par parties :

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1 + x^2)^n} = -\int_0^\infty x\,d\left[\frac{1}{2(n-1)(1 - x^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\left[\frac{x}{2(n-1)(1 + x^2)^{n-1}}\right]_0^\infty$$

$$+ \int_0^\infty \frac{dx}{2(n-1)(1 + x^2)^{n-1}} = \frac{1}{2(n-1)}\,I_{n-1}.$$

Par suite,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1},$$

$$I_{n-1} = \frac{2n-5}{2n-4}\,I_{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\,I_1,$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On en conclut, par multiplication,

$$I_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

2° L'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(1 + x^2)^3}\,dx$$

s'écrit

$$I = \int_0^\infty \frac{ax^2+c}{(1+x^2)^3} x\,dx + \int_0^\infty \frac{bx^2+d}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

$$\begin{aligned} I = {} & a\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} + (c-a)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^3} \\ & + b\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} + (d-b)\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I = a\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_0^\infty + (c-a)\left[-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\right]_0^\infty \\ + bI_2 + (d-b)I_3. \end{aligned}$$

D'où, enfin,

$$I = \frac{c+a}{4} + \frac{b+3d}{16}\pi.$$

DEUXIÈME QUESTION.

1° L'intégrale générale de l'équation

$$y'' + a^2 y = \sin x \tag{1}$$

est, comme on sait, lorsque $a \neq 1$,

$$y = A\cos ax + B\sin ax + \frac{\sin x}{a^2-1};$$

sa dérivée est

$$y' = -Aa\sin ax + Ba\cos ax + \frac{\cos x}{a^2-1}.$$

2° Pour que y et y' s'annulent pour $x = 0$, il faut avoir

$$0 = A, \qquad 0 = Ba + \frac{1}{a^2-1}$$

ou

$$B = -\frac{1}{a(a^2-1)}.$$

L'intégrale particulière qui s'annule ainsi que sa dérivée pour $x = 0$ est donc

$$y_1 = \frac{a\sin x - \sin ax}{a(a^2-1)}.$$

3° Lorsque a tend vers *un*, la limite de y_1 est donnée par la règle de l'Hospital :

$$y_1 = \frac{\sin x - x\cos x}{2}.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est alors, dans ce cas,

$$y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}'\sin x + \frac{1}{2}(\sin x - x\cos x)$$

ou, plus simplement,

$$y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x,$$

A et B désignant des constantes arbitraires.

TROISIÈME QUESTION.

Tout se passe comme s'il s'agissait d'un point matériel se mouvant à l'intérieur du parallélépipède Q limité par les plans

$$x = \pm 5, \qquad y = \pm 10, \qquad z = \pm 15.$$

Les équations du mouvement initial sont

$$x = t, \qquad y = \sqrt{2}t, \qquad z = \sqrt{3}t.$$

Chaque fois que le point rencontre une des faces du parallélépipède (par exemple $x = 5$), une seule des projections de la vitesse change de signe et les autres ne changent pas (par exemple la projection sur Ox devient -1).

On peut donc étudier chacune des coordonnées séparément.

Le temps qui sépare deux chocs contre les plans $x = \pm 5$ est égal à leur distance 10, divisée par la vitesse suivant Ox ; c'est donc 10.

Le temps qui sépare deux chocs contre les plans $y = \pm 10$ est égal à

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2};$$

celui qui sépare deux chocs contre les plans $z = \pm 15$ est égal à

$$\frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}.$$

1° Au temps $t = 10$ il y a eu une réflexion sur chaque face :

Sur $x = 5$	au temps	$t = 5$,
Sur $y = 10$	»	$t = 5\sqrt{2}$,
Sur $z = 15$	»	$t = 5\sqrt{3}$.

Les coordonnées, au temps $t = 10$, sont donc

$$x = 5 - 5 = 0,$$
$$y = 10 - \sqrt{2}(10 - 5\sqrt{2}) = 20 - 10\sqrt{2},$$
$$z = 15 - \sqrt{3}(10 - 5\sqrt{3}) = 30 - 10\sqrt{3};$$

comme

$$\sqrt{2} = 1{,}414, \qquad \sqrt{3} = 1{,}73205,$$
$$x = 0, \qquad y = 5,86, \qquad z = 12,68.$$

2° Le premier choc sur le plan $z = 15$ a lieu à l'instant $5\sqrt{3}$; il y aura en outre, au temps $t = 1000$, autant de réflexions sur les plans $z = \pm 15$ que $10\sqrt{3}$ est contenu de fois dans $1000 - 5\sqrt{3}$.

La partie entière de

$$\frac{1000 - 5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} - 0{,}5 = 57{,}2$$

est 57.

Au temps $t = 1000$ le point a subi, par suite, 58 réflexions, la dernière ayant lieu sur le plan $z = -15$ et au temps $5\sqrt{3} + 570\sqrt{3} = 575\sqrt{3}$.

La valeur de z au temps $t = 1000$ est donc

$$z = -15 + \sqrt{3}(1000 - 575\sqrt{3}),$$
$$z = -1740 + 1000\sqrt{3} = -1740 + 1732,05,$$
$$z = -7,95.$$

Composition de Mathématiques (Sciences I).

PREMIÈRE QUESTION.

1° *On considère trois axes rectangulaires* $Oxyz$ *et, dans le plan* Oxy, *deux hyperboles* (H) *et* (H′) *et une droite* (D) *définies respectivement par les équations*

$$(\mathrm{H})\left\{\begin{aligned} z &= 0,\\ x^2 - y^2 &= m^2,\end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{H}')\left\{\begin{aligned} z &= 0,\\ 2xy &= n^2,\end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{D})\left\{\begin{aligned} z &= 0,\\ 2x &= p.\end{aligned}\right.$$

Soient M *et* M′ *deux points du plan* Oxy *satisfaisant aux trois conditions suivantes : ils sont conjugués par rapport à* (H) *et à* (H′); *le milieu de la droite qui les joint est situé sur* (D).

Montrer que M *décrit une courbe* (C) *et* M′ *une courbe* (C′) *qui coïncide avec* (C).

2° *On désigne par* $O_1x_1y_1z_1$ *un trièdre coïncidant avec le trièdre* $Oxyz$; *on suppose que ce trièdre peut se déplacer en entraînant avec lui la courbe* (C′); *on désigne par* (C_1) *et par* M_1 *les positions que prennent dans ce déplacement la courbe* (C′) *et le point* M′; *le trièdre* $Oxyz$ *reste fixe ainsi que la courbe* (C).

On supposera dorénavant que le trièdre mobile $O_1x_1y_1z_1$ *est toujours dans une position telle que l'angle des deux directions* Oz, O_1z_1 *soit égal à* *deux droits; dès lors, la position de ce trièdre est définie par les coordonnées* a, b, c *du sommet* O_1, *par rapport aux axes* $Oxyz$, *et l'angle* φ *des directions* Ox, O_1x_1.

3° *On demande d'écrire les relations qui doivent exister entre* a, b, c, φ *pour que le trièdre* $O_1x_1y_1z_1$ *soit symétrique du trièdre* $Oxyz$ *par rapport à une droite du plan* Oxy, *étant entendu que* O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 *doivent être respectivement les symétriques de* Ox, Oy, Oz. *Une pareille position du trièdre* $O_1x_1y_1z_1$ *est définie si l'on se donne les valeurs* a_0, b_0 *des coordonnées* a, b : *on demande alors d'exprimer les coordonnées* X, Y, Z *du point* M_1, *par rapport aux axes* $Oxyz$, *en fonction des coordonnées du point* M *et de* a_0, b_0.

4° *On suppose que le trièdre* $O_1x_1y_1z_1$ *se déplace en partant de la position qu'on vient de définir; montrer qu'on peut faire varier* a, b, c, φ *de telle manière que, dans ce déplacement, la distance* MM_1 *d'un point quelconque* M *de la courbe* (C) *au point correspondant* M_1 *de la courbe* (C_1) *reste invariable.*

SECONDE QUESTION.

On considère trois axes rectangulaires et la surface ayant pour équation

$$z = \frac{y^3 + xy^2 + \lambda x^3}{y + x},$$

λ *étant une constante.*

Étudier la variation de la courbure à l'origine des sections de cette surface par les plans $y = mx$ *lorsque le paramètre* m *varie.*

On examinera particulièrement les cas suivants : 1° $\lambda = \frac{4}{3}$; 2° $\lambda = -\frac{4}{9}$.

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

PREMIÈRE QUESTION.

1° Les relations qui lient les coordonnées x', y' du point M′ aux coordonnées x, y du point M sont

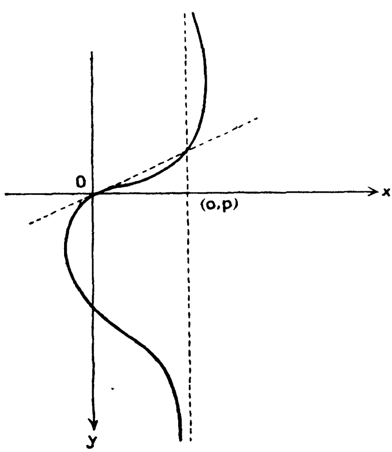
$$xx' - yy' - m^2 = 0, \tag{1}$$
$$xy' + yx' - n^2 = 0, \tag{2}$$
$$x + x' - p = 0. \tag{3}$$

En éliminant x' et y' entre ces trois équations, on a l'équation de la courbe (C) :

$$(x^2 + y^2)(p - x) - m^2 x - n^2 y = 0.$$

C'est une cubique circulaire passant par l'origine des

Fig. 1.

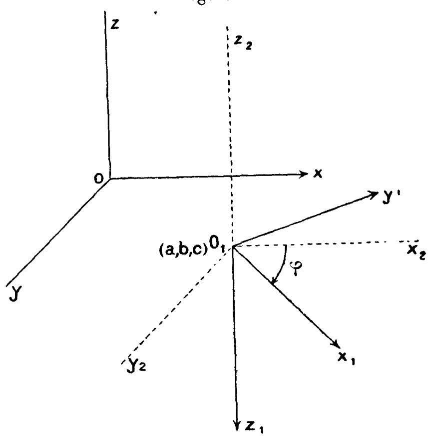


coordonnées, admettant la droite $x = p$ comme asymptote. Sa forme est indiquée dans la figure 1.

La symétrie des équations (1), (2), (3), qui ne changent pas quand on permute x avec x' et y avec y', montre que la courbe (C′) est identique à (C).

2° Soit (*fig.* 2) $O_1 x_2 y_2 z_2$ le trièdre $Oxyz$ trans-

Fig. 2.



porté parallèlement à lui-même de façon que son sommet soit en O_1.

Les angles des directions des axes du trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$ avec les axes du trièdre $O_1 x_2 y_2 z_2$ sont les mêmes que ceux que font les axes de $O_1 x_1 y_1 z_1$ avec les axes de $Oxyz$. Ils sont donnés par le Tableau :

	$O_1 x_1$.	$O_1 y_1$.	$O_1 z_1$.
Ox.	φ	$\varphi - \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Oy.	$\varphi - \frac{\pi}{2}$	$\varphi - \pi$	$\frac{\pi}{2}$
Oz.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Les formules de changement de coordonnées sont donc

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a + x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi, \\ y = b + x_1 \sin\varphi - y_1 \cos\varphi, \\ z = c - z_1. \end{cases}$$

3° Soient

$$ux + vy + w = 0, \qquad z = 0$$

les équations d'une droite Δ du plan xOy.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'espace. Si ce point est supposé entraîné avec le trièdre $O_1x_1y_1z_1$, ses coordonnées par rapport à ce trièdre restent x, y, z et deviennent par rapport au trièdre $Oxyz$

$$\begin{aligned} X &= a + x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ Y &= b + x\sin\varphi - y\cos\varphi, \\ Z &= c - z, \end{aligned}$$

en vertu des formules (4).

Pour qu'il y ait symétrie par rapport à Δ il faut : 1° que le milieu $\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2}, \frac{z+Z}{2}$ des deux points soit sur Δ; 2° que la droite qui joint les deux points soit perpendiculaire à Δ.

Ce qui donne

$$u\frac{a + x\cos\varphi + y\sin\varphi + x}{2} + v\frac{b + x\sin\varphi - y\cos\varphi + y}{2} + w = 0,$$

$$\frac{c - z + z}{2} = 0,$$

$$(a + x\cos\varphi + y\sin\varphi - x)v - (b + x\sin\varphi - y\cos\varphi - y)u = 0,$$

relations qui doivent être vérifiées identiquement quels que soient x, y et z. Ceci entraîne

$$\begin{aligned} c &= 0, \\ au + bv + 2w &= 0, \\ u(1 + \cos\varphi) + v \sin\varphi &= 0, \\ u \sin\varphi + v(1 - \cos\varphi) &= 0, \\ av - bu &= 0. \end{aligned}$$

Ces cinq relations se réduisent à quatre

$$\begin{aligned} c &= 0, \\ au + bv + 2w &= 0, \\ av - bu &= 0, \\ u \cos\frac{\varphi}{2} + v \sin\frac{\varphi}{2} &= 0, \end{aligned}$$

qui déterminent a, b, c, φ, connaissant l'équation de Δ.

On aurait pu trouver plus rapidement ces relations en écrivant que O et O_1 sont symétriques par rapport à Δ, et que Δ est la bissectrice de l'angle de Ox et O_1x_1.

Si l'on se donne les valeurs a_0 et b_0 de a et b, on a, pour déterminer φ,

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = -\frac{u}{v} = -\frac{a_0}{b_0}.$$

On en déduit

$$\cos\varphi = \frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2}, \qquad \sin\varphi = -\frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2}.$$

Les coordonnées de M_1 par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$ sont

$$x_1 = x', \qquad y_1 = y', \qquad z_1 = 0.$$

On a donc, en vertu des formules (4),

$$\begin{aligned} X &= a_0 + x'\frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2} - y'\frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2}, \\ Y &= b_0 - x'\frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2} - y'\frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2}, \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

Il suffirait de tirer x', y', z' en fonction de x, y, z de deux des équations (1), (2), (3) et de porter ces valeurs dans ces formules pour avoir X, Y, Z en fonction de a_0, b_0, x, y et z.

4° Lorsque le trièdre se déplace d'une façon arbitraire, l'angle de Oz et $O_1 z_1$ restant toujours égal à π, les coordonnées de M_1 par rapport à $Oxyz$ sont

$$\begin{aligned}
X &= a + x' \cos\varphi + y' \sin\varphi,\\
Y &= b + x' \sin\varphi - y' \cos\varphi,\\
Z &= c.
\end{aligned}$$

Écrivons que le carré de la distance MM_1 a la même valeur pour la position initiale de $O_1 x_1 y_1 z_1$ et pour une position quelconque; il vient

$$\begin{aligned}
&(a + x'\cos\varphi + y'\sin\varphi - x)^2 + (b + x'\sin\varphi - y'\cos\varphi - y)^2 + c^2\\
&\quad = (a_0 + x'\cos\varphi_0 + y'\sin\varphi_0 - x)^2 + (b_0 + x'\sin\varphi_0 - y'\cos\varphi_0 - y)^2,
\end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi_0}{2} = -\frac{a_0}{b_0}.$$

Ceci donne, en développant et simplifiant,

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 - c^2 - 2ax - 2by + 2(ax' - by' - xx' + yy')\cos\varphi\\
&\quad + 2(ay' + bx' - xy' - yx')\sin\varphi\\
&= a_0^2 + b_0^2 - 2a_0 x - 2b_0 y + 2(a_0 x' - b_0 y' - xx' + yy')\cos\varphi_0\\
&\quad + 2(a_0 y' + b_0 x' - xy' - yx')\sin\varphi_0.
\end{aligned}$$

La relation (1) permet de remplacer $xx' - yy'$ par m^2, la relation (2) de remplacer $xy' - yx'$ par n^2; enfin, à cause de (3), remplaçons x par $p - x'$, et il vient

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 - 2a(p - x') - 2by\\
&\quad + 2(ax' - by' - m^2)\cos\varphi - 2(ay' + bx' - n^2)\sin\varphi\\
&= a_0^2 + b_0^2 - 2a_0(p - x') - 2b_0 y\\
&\quad + 2(a_0 x' - b_0 y' - n^2)\cos\varphi_0 + 2(a_0 y' + b_0 x' - n^2)\sin\varphi_0.
\end{aligned}$$

Cette relation doit être une *identité* en x', y', y.

Si en effet le coefficient de y était différent de zéro, on pourrait exprimer y *linéairement* en x' et y' : ce qui n'est pas, en vertu des relations (1), (2) et (3). Le coefficient de y étant nul, la relation ne contient plus que x' et y' au *premier degré*. Ce doit donc être une identité, puisque le lieu du point $x'y'$ est, non pas une droite, mais une cubique (C'); on a ainsi les quatre relations

$$b = b_0,$$
$$2a(1+\cos\varphi) + 2b\sin\varphi = 0,$$
$$-2b\cos\varphi + 2a\sin\varphi = -2b_0,$$
$$a^2 + b^2 - 2ap - 2m^2\cos\varphi - 2n^2\sin\varphi$$
$$= a_0^2 - 2a_0 p - 2m^2\frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2} + 4n^2\frac{a_0 b_0}{b_0^2 + a_0^2}.$$

La deuxième et la troisième se réduisent à une seule :

$$a\cos\frac{\varphi}{2} + b_0\sin\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Il n'y a donc que trois relations entre les quatre paramètres a, b, c, φ. Ce sont

$$b = b_0, \qquad \tang\frac{\varphi}{2} = -\frac{a}{b_0},$$
$$a^2 + c^2 - 2ap - 2m^2\frac{b_0^2 - a^2}{b_0^2 + a^2} + 4n^2\frac{b_0 a}{b_0^2 + a_0^2}$$
$$= a_0^2 - 2a_0 p - 2m^2\frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2} + 4n^2\frac{b_0 a_0}{b_0^2 + a_0^2}.$$

La dernière résolue par rapport à c^2 donne

$$c^2 = (a_0 - a)\Big[a_0 + a - 2p$$
$$+ 4\frac{m^2 b_0^2(a_0 - a) + n^2 b_0(b_0^2 - aa_0)}{(b_0^2 + a_0^2)(b_0^2 + a^2)}\Big].$$

Le sommet O_1 du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ décrit donc une courbe plane du quatrième ordre située dans le plan

$$y = b_0$$

et qui a pour équation dans ce plan

$$z^2 = (a_0 - x)\left[a_0 + x - 2p + 4\frac{m^2 b_0^2 (a_0 + x) + n^2 b_0 (b_0^2 - a_0 x)}{(b_0^2 + a_0^2)(b_0^2 + x^2)}\right].$$

A chaque position de O_1 sur cette courbe correspond une valeur de φ donnée par l'équation

$$\tang\frac{\varphi}{2} = -\frac{a}{b_0},$$

qui prouve que la projection de $x_1 O_1 y_1$ sur Oxy est symétrique de xOy par rapport à une certaine droite Δ de ce plan.

SECONDE QUESTION.

La section de la surface par le plan

$$y = mx$$

se compose de l'axe Oz et d'une parabole dont la projection sur zOx a pour équation

$$z = \frac{m^3 + m^2 + \lambda}{m + 1} x^2.$$

Le plan xOy étant tangent à l'origine, le rayon de courbure est la limite du rapport

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2z} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad \text{ou} \quad \frac{(1 + m^2)x^2}{2z},$$

quand x et z tendent vers zéro. On a ainsi de suite

$$R = \frac{(1 + m^2)(1 + m)}{2(m^3 + m^2 + \lambda)}.$$

On en déduit

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-2m^3 + (3\lambda - 4)m^2 + 2(\lambda - 1)m + \lambda}{2(m^3 + m^2 + \lambda)^2}.$$

1° Pour $\lambda = \frac{4}{3}$, on a

$$R = \frac{(1+m^2)(1+m)}{2\left(m^3+m^2+\frac{4}{3}\right)},$$

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-m^3+\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}}{\left(m^3+m^2+\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\left(m^2+m+\frac{2}{3}\right)(1-m)}{\left(m^3+m^2+\frac{4}{3}\right)^2}.$$

R s'annule pour $m = -1$ (le plan $x+y=0$ coupe suivant la droite triple oz) et devient infini pour une valeur $-\alpha$ comprise entre $-\infty$ et -1.

Sa dérivée ne s'annule que pour $m = 1$; on a donc le Tableau de variation suivant :

m.	$\frac{dR}{dm}$.	R.
$-\infty$		$\frac{1}{2}$
	$+$	croît
$-\alpha$	...	$\frac{+\infty}{-\infty}$
	$+$	croît
-1	...	0
	$+$	croît
$+1$	0	$\frac{3}{5}$ (*max.*)
	$-$	décroît
$+\infty$		$\frac{1}{2}$

2° Pour $\lambda = -\frac{4}{9}$, on a

$$R = \frac{(1+m^2)(1+m)}{2\left(m^3+m^2-\frac{4}{9}\right)},$$

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-m^3-\frac{8}{3}m^2-\frac{13}{9}m-\frac{2}{9}}{\left(m^3+m^2-\frac{4}{9}\right)^2},$$

ou

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-(m+2)\left(m+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(m^3+m^2-\frac{4}{9}\right)^2};$$

R s'annule pour $m = -1$ et devient infini pour une valeur β positive.

On a donc le Tableau de variation suivant :

m.	$\frac{dR}{dm}$.	R
$-\infty$		$\frac{1}{2}$
	$+$	croît
-2	0	$\frac{9}{16}$ (*max.*)
	$-$	decroît
-1	...	0
	$-$	décroît
$-\frac{1}{3}$	0	-1
	$-$	décroît
β	...	$\frac{-\infty}{+\infty}$
	$-$	décroît
$+\infty$		$\frac{1}{2}$

Cas général. — Il serait facile d'aborder maintenant le cas général. Le discriminant du numérateur de $\frac{dR}{dm}$ est

$$\Delta = 54\lambda^4 - 84\lambda^3 + 60\lambda^2 + 48\lambda,$$

dont nous connaissons d'avance une racine $\lambda = -\frac{4}{9}$; on a donc

$$\Delta = 6\lambda(9\lambda+4)(\lambda^2-2\lambda+2).$$

Lorsque λ est compris entre $-\frac{4}{9}$ et zéro, et dans ce cas seulement, $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs de λ.

D'autre part, le dénominateur de R n'a trois racines réelles que lorsque λ est compris entre $-\frac{4}{27}$ et zéro.

Il y aura donc quatre cas à examiner :

1° $\lambda \leqq -\frac{4}{9}$. Dans ce cas R devient infini pour une seule valeur de m qui est positive, et il passe par un maximum pour une valeur négative de m.

La variation est analogue à celle du second cas particulier.

2° $-\frac{4}{9} < \lambda \leqq -\frac{4}{27}$. R n'a toujours qu'un infini positif, mais $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs *négatives* de m; il y a deux maxima et un minimum.

Pour $\lambda = -\frac{4}{27}$, R a, en plus, un infini double.

3° $-\frac{4}{27} < \lambda \leqq 0$. R devient infini pour trois valeurs réelles de m, deux négatives, une positive; $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs négatives de m.

Pour $\lambda = 0$, on a

$$R = \frac{1 + m^2}{2m^2}.$$

La surface se réduit au plan $x + y = 0$ et au cylindre parabolique $z = y^2$.

4° $\lambda > 0$. R est infini pour une valeur négative de m et $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour une valeur positive de m.

La variation est du type de celle du premier cas particulier.