JUHEL-RÉNOY

Sur l'application des déterminants à la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 450-456

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__450_1>

[K¹10e]

SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

(SUITE.)

I. Considérons, sur un axe orienté, deux groupes de n points O_1, O_2, O_3, ..., O_n d'une part, et A_1, A_2, A_3, ..., A_n de l'autre. On a, entre les distances mutuelles de chaque point d'un groupe aux n points de l'autre, la relation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^p & \overline{O_1A_2}^p & \ldots & \overline{O_1A_n}^p & 1 \\ \overline{O_2A_1}^p & \overline{O_2A_2}^p & \ldots & \overline{O_2A_n}^p & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . \\ \overline{O_nA_1}^p & \overline{O_nA_2}^p & \ldots & \overline{O_nA_n}^p & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, la relation est, au plus, du degré $(p-1)$ par rapport à l'abscisse du point O_k, et elle est satisfaite pour $(n-1)$ positions du point O_k, puisque, quand le point O_k se confond avec le point O_i, le déterminant a deux lignes identiques. Si donc on a

$$n-1 \geqq p \qquad \text{ou} \qquad n \geqq p+1,$$

la relation est toujours vraie.

En particulier, si le point O_1 coïncide avec A_1, O_2 avec A_2, et ainsi de suite, on a une relation entre les distances mutuelles de n points d'un axe orienté :

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1A_2}^p & \overline{A_1A_3}^p & \ldots & \overline{A_1A_n}^p & 1 \\ \overline{A_2A_1}^p & 0 & \overline{A_2A_3}^p & \ldots & \overline{A_2A_n}^p & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . \\ \overline{A_nA_1}^p & \overline{A_nA_2}^p & \overline{A_nA_3}^p & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $p=1$ et $n=3$, cette relation devient

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & A_1A_2 & A_1A_3 & 1 \\ A_2A_1 & 0 & A_2A_3 & 1 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'expression même du théorème de Chasles relatif aux distances mutuelles de trois points en ligne droite.

Il n'est pas inutile d'observer, comme je l'ai déjà fait remarquer pour la condition pour que quatre points soient sur un même cercle, que cette condition ne renferme que les distances mutuelles des trois points, tandis que la relation que l'on donne habituellement et dont la démonstration s'obtient par la multiplication des déterminants, quoique d'apparence absolument semblable, ne renferme que les *carrés* des distances respectives des trois points deux à deux.

II. Soient n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un axe orienté et n points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de l'espace. Désignons par x_i l'abscisse du point A_i et par $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ les coordonnées du point O_k par rapport à un système d'axes rectangulaires ayant l'axe orienté pour axe des x; on a

$$\overline{O_k A_i}^2 = (x_i - \alpha_k)^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2,$$

c'est-à-dire que le carré de la distance d'un point de l'axe orienté à un point quelconque de l'espace est une fonction rationnelle, entière et du second degré de l'abscisse du point de l'axe orienté.

Il en résulte qu'on a, entre les distances mutuelles de chaque point de l'axe orienté aux n points de l'espace, la relation

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1 A_1}^{2p} & \overline{O_1 A_2}^{2p} & \ldots & \overline{O_1 A_n}^{2p} & 1 \\ \overline{O_2 A_1}^{2p} & \overline{O_2 A_2}^{2p} & \ldots & \overline{O_2 A_n}^{2p} & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . \\ \overline{O_n A_1}^{2p} & \overline{O_n A_2}^{2p} & \ldots & \overline{O_n A_n}^{2p} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, la relation est, au plus, du degré $(2p-1)$

par rapport à l'abscisse du point A_i et elle est satisfaite pour $n-1$ positions du point A_i. Si donc on a

$$n \geqq 2p+1,$$

la relation est identique.

En particulier, si l'on suppose que les points de l'espace $O_2, O_3, \ldots, O_n$ se confondent respectivement avec les points $A_2, A_3, \ldots, A_n$ de l'axe orienté, on a une relation entre les distances d'un point O à n points d'un axe orienté :

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \overline{OA_1}^{2p} & \overline{OA_2}^{2p} & \overline{OA_3}^{2p} & \cdots & \overline{OA_n}^{2p} & 1 \\ \overline{A_2A_1}^{2p} & 0 & \overline{A_2A_3}^{2p} & \cdots & \overline{A_2A_n}^{2p} & 1 \\ \overline{A_3A_1}^{2p} & \overline{A_3A_2}^{2p} & 0 & \cdots & \overline{A_3A_n}^{2p} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \overline{A_nA_1}^{2p} & \overline{A_nA_2}^{2p} & \overline{A_nA_3}^{2p} & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

égalité qui, dans le cas particulier de $p=1$ et $n=3$, donne le théorème de Stewart.

III. Nous avons démontré précédemment que, si l'on considère, sur un cercle orienté, deux groupes de n points $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ d'une part et $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de l'autre, on a, entre les distances mutuelles de chaque point d'un groupe aux n points de l'autre, la relation

$$(6)\quad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^{p} & \overline{O_1A_2}^{p} & \overline{O_1A_3}^{p} & \cdots & \overline{O_1A_n}^{p} \\ \overline{O_2A_1}^{p} & \overline{O_2A_2}^{p} & \overline{O_2A_3}^{p} & \cdots & \overline{O_2A_n}^{p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{O_nA_1}^{p} & \overline{O_nA_2}^{p} & \overline{O_nA_3}^{p} & \cdots & \overline{O_nA_n}^{p} \end{vmatrix} = 0,$$

avec la condition

$$n \geqq p + 2.$$

Cette relation est applicable à deux groupes de points d'un axe orienté. En effet, elle est, au plus, du degré p par rapport aux distances du point O_k aux n points A, et elle est satisfaite pour $(n - 1)$ positions du point O_k. Si donc on a

$$n - 1 \geqq p + 1,$$

la relation est toujours vraie.

En particulier, si le point O_1 coïncide avec A_1, O_2 avec A_2 et ainsi de suite, on a une relation entre les distances mutuelles de n points d'un axe orienté :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1A_2}^p & \overline{A_1A_3}^p & \ldots & \overline{A_1A_n}^p \\ \overline{A_2A_1}^p & 0 & \overline{A_2A_3}^p & \ldots & \overline{A_2A_n}^p \\ \overline{A_3A_1}^p & \overline{A_3A_2}^p & 0 & \ldots & \overline{A_3A_n}^p \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \overline{A_nA_1}^p & \overline{A_nA_2}^p & \overline{A_nA_3}^p & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas où p est pair, la relation (6) s'applique à deux groupes de n points, l'un pris sur un axe orienté, l'autre disposé d'une manière quelconque dans l'espace.

Remarque. — Les relations (4) et (6) s'appliquent indistinctement à des points situés sur un axe ou sur un cercle orienté. Elles sont applicables également [la relation (6) seulement dans le cas où p est pair] à deux groupes de n points, l'un des groupes étant pris sur un axe ou un cercle orienté, l'autre disposé d'une manière quelconque dans l'espace.

Considérons, en particulier, dans le cas du cercle, les deux relations qu'on déduit des égalités (4) et (6) en faisant coïncider les points A_i avec les points O_i respectivement ($i = 1, 2, 3, 4$) :

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1A_2}^2 & \overline{A_1A_3}^2 & \overline{A_1A_4}^2 & 1 \\ \overline{A_2A_1}^2 & 0 & \overline{A_2A_3}^2 & \overline{A_2A_4}^2 & 1 \\ \overline{A_3A_1}^2 & \overline{A_3A_2}^2 & 0 & \overline{A_3A_4}^2 & 1 \\ \overline{A_4A_1}^2 & \overline{A_4A_2}^2 & \overline{A_4A_3}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_1A_2 & A_1A_3 & A_1A_4 \\ A_2A_1 & 0 & A_2A_3 & A_2A_4 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & 0 & A_3A_4 \\ A_4A_1 & A_4A_2 & A_4A_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

La dernière exprime la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points, non situés en ligne droite, soient sur un même cercle. La première exprime uniquement une relation entre les distances mutuelles de quatre points d'un cercle. Elle n'est autre que la relation bien connue qui existe entre les distances deux à deux de quatre points d'un plan.

De même la relation que l'on déduit de la relation (4) en supposant $p = 1$ et $n = 5$, et qui est applicable à cinq points d'un axe ou d'un cercle orienté, est satisfaite par cinq points situés d'une manière quelconque dans l'espace, et, en particulier, sur une sphère.

Remarquons encore que la relation

$$(9)\quad \begin{vmatrix} 0 & \overline{A_1A_2}^2 & \overline{A_1A_3}^2 & \overline{A_1A_4}^2 & \overline{A_1A_5}^2 \\ \overline{A_2A_1}^2 & 0 & \overline{A_2A_3}^2 & \overline{A_2A_4}^2 & \overline{A_2A_5}^2 \\ \overline{A_3A_1}^2 & \overline{A_3A_2}^2 & 0 & \overline{A_3A_4}^2 & \overline{A_3A_5}^2 \\ \overline{A_4A_1}^2 & \overline{A_4A_2}^2 & \overline{A_4A_3}^2 & 0 & \overline{A_4A_5}^2 \\ \overline{A_5A_1}^2 & \overline{A_5A_2}^2 & \overline{A_5A_3}^2 & \overline{A_5A_4}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

relative à cinq points d'un axe ou d'un cercle, est applicable également à cinq points d'une sphère.

Remarque. — Si l'on transforme par inversion les relations (1) et (6) par rapport à un pôle distinct des points O et A, la relation (1) donne une relation de la forme (6) et la relation (6) une relation de même forme.