AUGUSTE DETEUF

Sur un point particulier du quadrilatère inscriptible

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 442-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__442_1>

[K[1]8b]

SUR UN POINT PARTICULIER DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE;

PAR M. AUGUSTE DETEUF,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Nous nous proposons de démontrer la propriété qui suit :

Il existe, dans tout quadrilatère inscriptible, un point où concourent 27 droites très particulières du quadrilatère.

Rappelons que, dans tout quadrilatère, inscriptible ou non, les droites joignant les milieux des diagonales, les milieux des côtés opposés, les quatre droites joignant chaque sommet au centre de gravité du triangle opposé, la droite joignant le point de rencontre des diagonales au centre de gravité du quadrilatère concourent en un point I. Nous appellerons ω le point nouveau que nous indiquons.

Soit O le centre du cercle circonscrit. Les 27 droites désignées sont :

1° La droite OI;

2° Les six perpendiculaires abaissées du milieu d'un côté (ou d'une diagonale) sur le côté (ou la diagonale) opposé;

3° Les quatre droites joignant un sommet à l'orthocentre du triangle opposé;

4° Les six droites joignant les orthocentres des deux triangles formés par deux des sommets du quadrilatère et le point de rencontre de deux côtés (les diagonales étant considérées comme des côtés);

5° Les quatre droites de Simpson relatives à un des quatre triangles formés par trois sommets et au quatrième sommet;

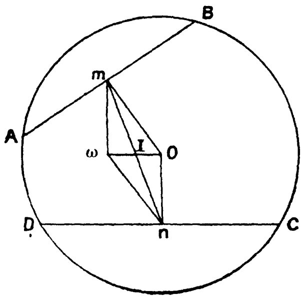
6° Les trois droites joignant les symétriques du centre par rapport aux milieux de deux côtés opposés;

7° Les trois perpendiculaires abaissées du point de rencontre de deux côtés opposés, sur la droite qui joint les milieux de ces côtés.

En ce point passent également les quatre cercles des neuf points relatifs à chaque triangle formé par trois des sommets.

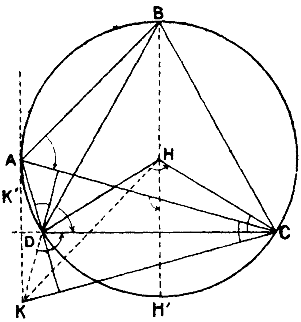
Démonstration. — 1°-2° Soient AB, CD (*fig.* 1) deux côtés opposés. Abaissons les perpendiculaires Om, On sur ces côtés, et des milieux m, n abaissons les perpendiculaires $m\omega$, $n\omega$ sur les côtés respectivement opposés. $Om\omega n$ est un parallélogramme. $O\omega$ coupe mn en son milieu. Mais le milieu de mn est le point I, défini plus haut. Donc ω est sur OI et symétrique de O par rapport à I. Cette propriété, indépendante des côtés ou diagonales choisis, amène les six droites analogues à $m\omega$ à se couper (en ω).

Fig. 1.



3° Considérons les orthocentres H et K des triangles BCD, CDA (*fig.* 2). Le parallélisme de HK

Fig. 2.

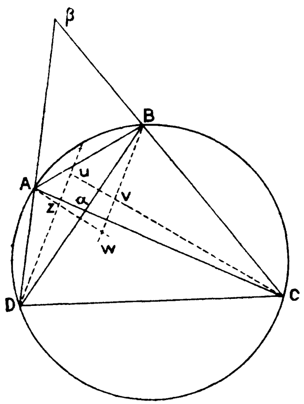


et AB se démontre facilement : les symétriques de H et K, par rapport à CD, sont, on le sait, sur la circonférence; H'K' est donc symétrique de HK par rapport à CD; de même H'K' est symétrique de AB par rapport à la perpendiculaire au milieu de BH', qui est parallèle à BC. AB et HK sont donc parallèles.

AKHB est ainsi un parallélogramme dont les diagonales AH, BK se coupent en leur milieu. Mais H et K sont quelconques. Les quatre droites analogues concourent donc; le point de concours se trouve sur la parallèle à AK menée par le milieu de AB, puisque c'est le centre de ABHK. Cette parallèle est l'une des droites du 2°. Il se trouve de même sur toutes les autres. C'est le point ω.

4° Ces triangles sont par exemple ABα (*fig.* 3). Si nous prenons les quatre triangles intérieurs, leurs orthocentres u, v, w, z sont les sommets d'un parallélogramme : la figure le montre, uw, vz se coupent au

Fig. 3.

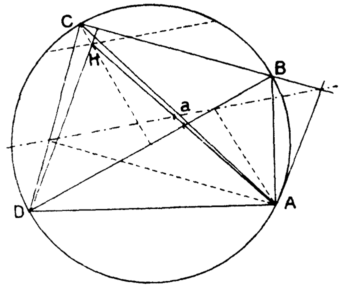


centre. Celui-ci s'obtient également en menant par le milieu de uv, ou ce qui revient au même de DB, la parallèle à Bv, puis par le milieu de vw (ou de AC) la parallèle à Cv. Ces droites sont les droites du 2°. Le centre est donc ω. Le même raisonnement s'applique aux triangles tels que ABβ, DCβ.

5° Soient un des sommets A et l'orthocentre H du triangle opposé; on sait que la droite de Simpson relative à ce triangle et à A passe par le milieu de AH, qui est précisément le point ω (3°).

6° Les droites joignant les milieux des côtés opposés

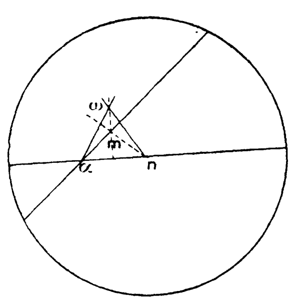
Fig. 4.



passent en I, les droites homothétiques dans le rapport 2 passent en ω (1°).

7° Soient m, n les milieux de deux côtés opposés, α leur point de rencontre (*fig.* 5). Les hauteurs du

Fig. 5.



triangle $\alpha m n$ concourent; or deux de ces hauteurs sont des droites du 2° et la troisième une des droites du 7°. Celles-ci passent donc en ω.

Pour les cercles des neuf points, considérons l'un des triangles ABC, dont l'orthocentre est H; son cercle des neuf points est homothétique du cercle circonscrit dans le rapport $\frac{1}{2}$. Le cercle circonscrit passe par le quatrième sommet D; le cercle des neuf points passe donc par le milieu de HD, qui est ω.

On peut rattacher à cette propriété les quelques théorèmes suivants :

ω étant ainsi défini,
O étant le centre du cercle circonscrit,
α le point de rencontre des diagonales,
I le milieu de $O\omega$, on montre facilement que :

Théorème I. — *Les droites qui joignent les sommets du quadrilatère aux centres des cercles des neuf points des triangles opposés concourent en un point qui est* $\frac{2}{3}$ *de* $O\omega$.

Centres de gravité. Théorème II. — *Le centre de gravité d'un quadrilatère est sur* αI *au delà de* I, *à une distance égale à* $\frac{1}{3}$ I.

Théorème III. — *Les centres de gravité de deux triangles opposés formés par un côté et le point de rencontre des deux diagonales sont en ligne droite avec un point qui est aux* $\frac{2}{3}$ *de* αI. *Il y a deux droites de cette sorte. Les droites joignant les centres de gravité de deux triangles formés par un même point de rencontre de deux côtés et deux autres côtés opposés passent au centre de gravité du triangle.*

On en déduit :

Théorème IV. — *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.*

Orthocentres. Théorème V. — *Les orthocentres* *des quatre triangles définis par trois sommets d'un quadrilatère forment un quadrilatère identique au précédent et symétrique par rapport à* ω.

Théorème VI. — *Les sommets du premier quadrilatère sont les orthocentres du second.*

Droites de Simpson. Théorème VII. — *Les quatre droites de Simpson sont coupées par les trois côtés du triangle qui correspond à chacune d'elles en deux segments égaux* 4 *à* 4; *les extrémités correspondantes de ces segments sont sur des cercles ayant pour centre* ω; *chaque quadrilatère est semblable à* ABCD.

Théorème VIII. — *On a la relation*

$$\overline{mn}^2 + \overline{O\omega}^2 = \overline{O\alpha}^2,$$

m et n étant les milieux de deux côtés opposés, et α *leur point de rencontre.*

Théorème IX. — *Tous les quadrilatères inscriptibles concentriques ayant mêmes diagonales ont même centre de gravité.*

Problème. — Construire un quadrilatère connaissant O, ω, α et R.

Théorème X. — *Les droites* Oα, ωα *sont également inclinées sur les bissectrices des diagonales; le rapport* $\frac{O\alpha}{\omega\alpha} = \sin^2 V$, V *étant l'angle des diagonales; on peut remplacer* α *par le point de rencontre de deux côtés opposés.*